ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

33

117970
1/8/11

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG
1910

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B., UPPSALA

PARIS
A. HERMANN.
6 RUE DE LA SORBONNE.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS – TABLE DES MATIÈRES.

BAND 33. — 1910. — TOME 33.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST A POINTS CRITIQUES FIXES.

PAR

B. GAMBIER

à Montpellier.

Introduction.

1. — *Objet de ce mémoire.* — M. Painlevé a indiqué une méthode pour déterminer toutes les équations différentielles (algébriques) du second ordre dont les points critiques sont fixes et il a développé cette methode explicitement dans le cas où l'équation est de la forme

$$y'' = R(y', y, x) \tag{1}$$

R rationnel en y', algébrique en y, algébrique ou analytique en x.

Un mémoire publié dans les Acta Mathematica (1902) renferme le tableau de toutes les équations (1) à points critiques fixes.

Ayant commencé, sur les conseils de M. Painlevé, l'application de sa méthode aux équations qui sont non plus du premier degré mais du second en y'', j'ai été conduit à réviser l'énumération des équations (1) et j'ai constaté que les tableaux dressés par M. Painlevé présentaient une lacune que je comblerai dans le présent mémoire. Cette lacune provient de ce que dans la discussion des cas nombreux que la méthode conduit à distinguer, M. Painlevé en a laissé échapper un, qui se trouve correspondre à des types nombreux et importants. Je préciserai d'abord cette omission.

2. On peut toujours mettre l'équation sous la forme

$$(2)\qquad y'' = \varrho(y', y, u, x)$$

ϱ étant rationnel en y', y, u et u étant lié à y par une relation algébrique qui dépend analytiquement de x soit

$$(3)\qquad H(u, y, x) = 0.$$

M. Painlevé montre d'abord que pour x arbitraire la relation (3) entre y et u doit être de genre 0 ou 1. Dans le cas où elle est de genre 1 les tableaux de M. Painlevé sont complets: je n'y reviendrai plus. Dans le cas où elle est de genre zéro on peut toujours moyennant un changement de variable très simple supposer que $R(y', y, x)$ est rationnel en y' et y. Dans ce cas, je vais indiquer pourquoi les tableaux de M. Painlevé doivent être notablement complétés.

M. Painlevé établit d'abord que l'équation (1) est de la forme

$$(4)\qquad y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x),$$

où $A(y, x)$ est l'une des 9 expressions θ

$$\theta \left\{ \begin{array}{l} 0; \quad \dfrac{a}{ay+b}; \quad \dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d}; \quad \dfrac{a\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ay+b} + \dfrac{c\left(1-\frac{1}{n}\right)}{cy+d}; \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d}\right) + \dfrac{e}{ey+f}; \quad \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f}\right); \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f}\right); \quad \dfrac{5}{6}\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{2}{3}\dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{ey+f}; \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f} + \dfrac{g}{gy+h}\right]; \end{array} \right.$$

$a, b, \ldots, h$, désignent des fonctions de x qui peuvent être identiquement nulles ou se réduire à des constantes, n désigne un entier positif supérieur à 1. En effectuant sur y la transformation homographique $Y = y$ ou $Y = \dfrac{1}{ay+b}$ ou $Y = \dfrac{cy+d}{ay+b}$ ou $Y = \dfrac{(af-be)\,(cy+d)}{(cf-de)\,(ay+b)}$ suivant que A coïncide avec la 1ère de ces expressions, ou la seconde, ou avec la 3ème et 4ème, ou enfin avec l'une quelconque des suivantes, on est ramené à une équation analogue

$$(5)\qquad Y'' = A(Y, X)\,Y'^2 + B(Y, X)\,Y' + C(Y, X),$$

où A, B, C sont rationnels en Y et où A coïncide avec une des 8 expressions θ'

$$a'\left\{\begin{array}{l} 0;\quad \dfrac{1}{Y};\quad \dfrac{1-\frac{1}{n}}{Y},\ n \text{ entier} > 1;\quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\right); \\[2ex] \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\right);\quad \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\right);\quad \dfrac{2}{3Y}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{Y-1};\quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}+\dfrac{1}{Y-H}\right) \end{array}\right.$$

H désignant soit une constante numérique a soit X.

M. Painlevé étudie ensuite les équations correspondant à chacune de ces 8 formes de A. Or l'énumération de M. Painlevé est complète pour les 2 formes $A = 0$ et $A = \frac{1}{Y}$ mais le cas $A = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{Y}$ présente une lacune importante et comme la discussion relative à ce cas retentit sur la discussion des 5 derniers, cette lacune entraîne l'existence de lacunes correspondantes dans les 5 derniers tableaux.

3. Ce n'est donc pas une erreur dans la méthode mais une omission dans l'application de la méthode qui explique les lacunes des tableaux de M. Painlevé et c'est par l'application même de cette méthode que j'ai comblé ces lacunes.

Cette méthode se décompose en deux méthodes distinctes:

1° une méthode qui fournit un certain ensemble de conditions *nécessaires* pour que l'équation ait ses points critiques fixes.

2° une méthode qui démontre que ces conditions sont *suffisantes*

L'application de la méthode aux cas omis par M. Painlevé n'était pas toutefois sans présenter des difficultés. Tout d'abord des complications de calcul, si les conditions étaient formées maladroitement. Ensuite il n'était pas certain que les conditions ainsi obtenues fussent intégrables, c'est-à-dire qu'on pût écrire explicitement à l'aide d'un certain nombre de fonctions de x *arbitraires* toutes les équations cherchées. Enfin parmi les équations obtenues, les unes sont intégrables, j'entends réductibles aux équations linéaires et aux quadratures, les autres sont irréductibles. Il fallait distinguer ces deux classes et notamment intégrer les équations intégrables, ce qui, comme on le verra plus loin, était pour certaines d'entre elles assez malaisé.

Je résume d'abord les résultats de cette discussion minutieuse. Les plus importants concernent les équations *irréductibles,* qui engendrent des transcendantes nouvelles.

4. *Transcendentes nouvelles engendrées par les équations différentielles du second ordre.*

Il existe 6 types et 6 seulement d'équations différentielles (1) à points critiques fixes qui sont irréductibles au sens le plus rigoureux du terme (sens de M. Drach). Ces 6 types peuvent recevoir les formes canoniques qui suivent [α, β, γ, δ désignent des constantes numériques]

$$\left\{\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & y'' = 6y^2 + x \\
\mathrm{II} & y'' = 2y^3 + xy + \alpha \\
\mathrm{III} & y'' = \dfrac{y'^2}{y} - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \dfrac{\delta}{y} \\
\mathrm{IV} & y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + \dfrac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \dfrac{\beta}{y} \\
\mathrm{V} & y'' = y'^2\left(\dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{y-1}\right) - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{(y-1)^2}{x^2}\left[\alpha y + \dfrac{\beta}{y}\right] + \gamma\dfrac{y}{x} + \dfrac{\delta y(y+1)}{y-1} \\
\mathrm{VI} & y'' = \dfrac{y'^2}{2}\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y-1} + \dfrac{1}{y-x}\right) - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-x}\right)y' + \\
& \qquad + \dfrac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \beta\dfrac{x}{y^2} + \gamma\dfrac{x-1}{(y-1)^2} + \delta\dfrac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right].
\end{array}\right.$$

Par suite de l'omission signalée, M. Painlevé n'avait obtenu que 3 types distincts d'équations irréductibles, à savoir les 3 premiers. Les tableaux qu'il avait formés ne contenaient pas l'équation IV; ils contenaient l'équation V dans le cas où $\alpha = \beta = 0$, auquel cas la transformation $y = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$ permet de la ramener au type III, tandis que si α, β ne sont pas nuls tous deux elle est irréductible au type III; de même l'équation VI ne figurait dans les tableaux de M. Painlevé que dans le cas où $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = \dfrac{1}{2}$ auquel cas elle est intégrable, tandis que dans le cas général elle est irréductible.

L'intégrale générale $y(x)$ des équations I, II, IV est uniforme; celle des équations III et V admet $x = 0$ et $x = \infty$ comme points critiques transcendants; si l'on effectue, pour ces 2 types la transformation $x = e^X$, la fonction $y(X)$ est une transcendante uniforme. Enfin l'intégrale générale $y(x)$ de l'équation VI admet les points critiques transcendants $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$.

5. La méthode employée par M. Painlevé pour montrer que l'équation $y'' = 6y^2 + x$ a ses points critiques fixes [Bulletin des Sciences Math. 1900] s'applique d'elle même aux autres équations. Dans une note des Comptes Rendus, 24 Décembre 1906, M. Painlevé a fait lui-même cette extension. Il a de plus montré que le type VI contient comme dégénérescences les 5 premiers:

V est dégénérescence de VI; III et IV dégénérescences de V; II dégénérescence de III ou IV et enfin I est dégénérescence de II.

M. Painlevé l'établit de la façon suivante: faisons dans VI $\delta = \frac{\delta_1}{\varepsilon^2}$, $\gamma = -\frac{\delta_1}{\varepsilon^2} + \frac{\gamma_1}{\varepsilon}$, $x = 1 + \varepsilon X$, $y = Y$ d'où une équation

$$Y'' = Y'^2\left(\frac{1}{2\,Y} + \frac{1}{Y-1}\right) - \frac{Y'}{X} + \frac{(Y-1)^2}{X^2}\left[\alpha\,Y + \frac{\beta}{Y}\right] + \gamma\frac{Y}{X} + \frac{\delta\,Y(Y+1)}{Y-1} + \varepsilon(\cdots)$$

qui a ses points critiques fixes en même temps que VI pour toute valeur numérique *non nulle* donnée à ε, et par suite encore pour $\varepsilon = 0$: or elle se réduit à V pour $\varepsilon = 0$. L'application du même principe donne en faisant dans V

$$\beta = -\frac{\beta_1}{\varepsilon^2}, \quad \alpha = \frac{\beta_1}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}, \quad \gamma = \gamma_1\,\varepsilon, \quad \delta = \delta_1\,\varepsilon^2, \quad y = 1 + \varepsilon\,Y, \quad x = X$$

la dégénérescence

$$Y'' = \frac{Y'^2}{Y} - \frac{Y'}{X} + \frac{Y^2}{X^2}(\alpha_1 + 2\,\beta_1\,Y) + \frac{\gamma_1}{X} + \frac{2\,\delta_1}{Y}$$

qui donne III en posant $X = \xi^2$, $Y = \eta\,\xi$.

De même si dans V on fait

$$\alpha = \frac{1}{2\,\varepsilon^4}, \quad \gamma = \frac{-1}{\varepsilon^4}, \quad \delta = -\left(\frac{1}{2\,\varepsilon^4} + \frac{\delta_1}{\varepsilon^2}\right), \quad y = \varepsilon\,Y, \quad x = 1 + \varepsilon\,X$$

on a la dégénérescence

$$Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + \frac{3}{2}\,Y^3 + 2\,X\,Y^2 + Y\left(\frac{X^2}{2} + \delta_1\right) + \frac{\beta}{Y}$$

qui donne IV en posant $X = \xi\sqrt{2}$, $\eta = Y\sqrt{2}$.

On pose maintenant dans III

$$\gamma = -\delta = \frac{1}{4\,\varepsilon^6}, \quad \alpha = -\frac{1}{2\,\varepsilon^6}, \quad \beta = \frac{1}{2\,\varepsilon^6}(1 + 4\,\beta_1\,\varepsilon^3)$$
$$x = 1 + \varepsilon^2\,X, \quad y = 1 + 2\,\varepsilon\,Y$$

on a la dégénérescence $Y'' = 2\,Y^3 + X\,Y + \beta_1$ ou II.

De même dans IV

$$\beta = -\frac{1}{2\,\varepsilon^{12}}, \quad \alpha = -\frac{1}{2\,\varepsilon^6} - \alpha_1, \quad y = \frac{1}{\varepsilon^3}(1 + 2\,\varepsilon^2\,Y), \quad x = \varepsilon\,X - \frac{1}{\varepsilon^3}$$

on a $Y'' = 8\,Y^3 + 4\,X\,Y + \alpha_1$ et en posant $2\,X = \xi\sqrt{2}$, $\eta = Y\sqrt{2}$ on a le type II.

Enfin la substitution $y=\varepsilon Y+\frac{1}{\varepsilon^5}$, $x=\varepsilon^2 X-\frac{6}{\varepsilon^{10}}$, $\alpha=\frac{4}{\varepsilon^{15}}$ transforme II en $Y''=6Y^2+X+\varepsilon^6(2Y^3+XY)$ ce qui conduit bien à I comme dégénérescence.

Or M. Painlevé a montré aux Comptes Rendus que l'équation $y''=6y^2+x$ est irréductible au sens le plus rigoureux du terme (sens de M. Drach). Il en résulte que les 5 suivantes sont aussi absolument irréductibles sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles des constantes α, β, γ, δ.

6. *Formation des conditions nécessaires pour que l'équation* (1) *ait ses points critiques fixes.*

Je voudrais indiquer maintenant la façon précise dont j'ai appliqué la méthode de M. Painlevé pour former les conditions *nécessaires* que vérifie toute équation (1) à points critiques fixes. L'équation à étudier est de la forme

$$y''=A(y,x)\,y'^2+B(y,x)\,y'+C(y,x) \tag{5}$$

où A est l'une des expressions θ'. Les expressions B et C sont des fonctions rationnelles en y, dont les pôles, d'après un résultat de M. Painlevé, sont simples et coïncident avec les pôles de A; la transformation $yY=1$ limite le degré de B et C en y par l'application de ce même résultat au pôle $Y=0$.

J'emploie alors la substitution de M. Painlevé: $x=x_0+\alpha X$, $Y=\alpha y$ d'où une équation dont l'intégrale générale est à points critiques fixes quelque soit α, sauf peut-être pour $\alpha=0$, donc encore pour $\alpha=0$: cette équation où α a été annulé, ou *équation simplifiée* est du type suivant

$$y''=a_0\,y\,y'+b_0\,y^3 \qquad \text{si} \quad A=0 \tag{6}$$

$$y''=\frac{y'^2}{y}+a_0\,y\,y'+b_0\,y^3 \quad \text{si} \quad A\equiv\frac{1}{y} \tag{7}$$

$$y''=\frac{y'^2}{y}\left(1-\frac{1}{n}\right)+a_0\,y\,y'+b_0\,y^3 \quad \text{pour les 6 dernières formes de } A \tag{8}$$

(n entier $\gtreqless 0$, différent de 0 ou de ± 1; a_0, b_0 désignent les valeurs pour $x=x_0$ de deux fonctions $a(x)$, $b(x)$ calculées rationnellement au moyen des coefficients de l'équation proposée.)

C'est dans l'étude de la simplifiée (8) que M. Painlevé a laissé échapper un cas important; cela explique comment les résultats de M. Painlevé étaient complets pour les 2 premières formes de A; la simplifiée (8) rentre dans les équations où A a la 3ème forme possible, et on voit comment les 5 dernières formes de A conduisant à la même forme simplifiée, une telle omission pour la

$3^{\text{ème}}$ forme de A entraîne des omissions correspondantes pour les formes suivantes de A.

En tous les cas les 3 simplifiées s'étudient de la même façon: la variable indépendante x manque, d'où résulte que si l'intégrale générale de cette simplifiée est a points critiques fixes, elle doit être de plus uniforme. Cette intégrale s'obtient par quadratures: si on écrit $y' = u y^2$, u vérifie une équation $u'' = u'^2 f(u)$ où f est rationnelle en u et on a en même temps $y = \varphi(u, u')$, φ étant rationnelle en u et u': or Briot et Bouquet ont déterminé toutes les formes possibles que peut avoir la fraction $f(u)$. L'application de leurs résultats donne ou bien $a(x) \equiv b(x) \equiv 0$ ou bien $\alpha a^2 + \beta b \equiv 0$, α et β étant deux constantes numériques non nulles toutes deux.

Occupons-nous d'abord de la seconde hypothèse $\alpha a^2 + \beta b \equiv 0$; $a(x)$, $b(x)$ ne sont pas nuls tous 2 identiquement. Cherchons s'il n'existe pas, pour une valeur *quelconque* x_0 attribuée à x, une intégrale de l'équation, non simplifiée, qui est étudiée

$$(5) \qquad y'' = A(y, x)\, y'^2 + B(y, x)\, y' + C(y, x)$$

qui admette $x = x_0$ comme pôle. Si cela a lieu cette intégrale est représentée par un développement

$$(9) \qquad y = \frac{a_1}{(x - x_0)^i} + \frac{a_2}{(x - x_0)^{i-1}} + \cdots$$

où $a_1, a_2, \ldots$ sont des constantes, i un entier positif. En substituant dans l'équation (5) on doit avoir une identité; les termes polaires de degré le plus élevé sont respectivement

$$\begin{array}{cccc} y'' & \dfrac{y'^2}{y} & y\,y' & y^3 \\[2ex] i+2 & i+2 & 2i+1 & 3i \end{array}$$

Il faut nécessairement que $i = 1$ sinon $i + 2 < 2i + 1 < 3i$ sans égalité: si $b \not\equiv 0$ le terme de degré $3i$ si $i > 1$ ne pourrait disparaître; si $b \equiv 0$, on aurait $a \not\equiv 0$ et alors le terme de degré $2i + 1$ ne pourrait disparaître.

Nous faisons $i = 1$ et substituons: a_1 est donné par une équation du premier degré si $b \equiv 0$, du second si $b \not\equiv 0$; puis $a_2, a_3, \ldots$ s'expriment tous au moyen des coefficients précédents par une équation du premier degré, sauf peut-être l'un d'eux et un seulement qui disparaît de l'équation qui devrait le fournir: mais alors il reste une relation qui est nécessaire pour que ce pôle existe: cette relation devant être vérifiée quel que soit x_0 entraîne une identité entre les coefficients de l'équation (5).

Si l'on prend la première hypothèse $a(x) \equiv b(x) \equiv 0$, on arrive à un résultat semblable. Je forme dans ce cas une *nouvelle simplifiée* en posant dans (5) $x = x_0 + \alpha X$, $Y = \alpha^2 y$, d'où par le même mécanisme

$$(6 \text{ bis}) \qquad y'' = e_0 y^2 \qquad \text{si} \quad A \equiv 0$$

$$(7 \text{ bis}) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e_0 y^2 \quad \text{si} \quad A \equiv \frac{1}{y}$$

$$(8 \text{ bis}) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + e_0 y^2 \text{ pour les 6 dernières formes de } A$$

(n désigne le même entier pour (8) et (8 bis), e_0 est la valeur pour $x = x_0$ d'une fonction $e(x)$ calculée rationnellement au moyen des coefficients de l'équation 5).

Cette nouvelle simplifiée s'intègre encore par quadrature. J'emploie d'ailleurs l'artifice suivant, je pose $y' = zy$ d'où $y = f(z, z')$ où f est rationnel en z et z' et l'équation

$$10) \qquad z'' = \gamma z z' + \delta z^3$$

où γ et δ sont des constantes numériques: cette équation (10) est précisément du type de la simplifiée (6) dont on a déterminé toutes les formes possibles. La conclusion est celle-ci: dans (6 bis) et (7 bis), $e(x)$ peut être identiquement nul ou non; dans (8 bis), $e(x)$ est identiquement nul, si n n'est égal ni à 2, ni à 4, ni à -4; pour ces dernières valeurs de n, $e(x)$ peut être ou non identiquement nul.

Si $e(x) \equiv 0$ l'étude est finie.

Si $e(x) \not\equiv 0$ nous remontons comme plus haut de la simplifiée à l'équation (5): je cherche comme plus haut, si pour $x = x_0$ où x_0 est *quelconque*, s'il existe une intégrale admettant x_0 pour pôle. Pour des raisons semblables $i = 2$, a_1 est donné par une équation du premier degré; les coefficients successifs se calculent comme plus haut et on arrive par le même mécanisme à une identité entre les coefficients de (5).

Cela fait on a épuisé tout ce que cette méthode peut donner pour la valeur $y = \infty$; il reste à faire, suivant la forme de A une étude semblable pour les autres valeurs singulières de y'' considérées comme fonction de y, à savoir $y = 0, 1,$ ou x. On ramène cette étude à celle de $y = \infty$ par une substitution faite sur (5)

$$Y = \frac{1}{y} \quad \text{ou} \quad Y = \frac{1}{y-1} \quad \text{ou} \quad Y = \frac{1}{y-x}.$$

7. Une question se pose ici: j'ai exprimé que les équations étudiées admettent des pôles mobiles (ou des zéros, ou des *unités* mobiles). Mais ces conditions sont-elles nécessaires pour que l'équation ait ses points critiques fixes?

La réponse est affirmative. M. PAINLEVÉ a donné l'énoncé général de ce théorème et l'a démontré en détail dans le cas où $A \equiv 0$ (Bulletin des Sciences mathématiques 1900). J'en donne une démonstration explicite pour l'un des cas nouveaux que je propose (voir plus loin, page 49). La démonstration employée montre qu'elle s'étend aux autres cas. Je supposerai donc ce point acquis.

Rendons nous compte du nombre de conditions obtenues: il suffit de raisonner pour $y = \infty$; il y avait 3 cas à considérer, d'après la nature des fonctions $a(x)$, $b(x)$, $e(x)$.

1°) $\alpha a^2 + \beta b \equiv 0$, sans que a et b soient identiquement nuls tous 2.

Suivant que α est nul ou non, il y a une ou deux familles de pôles mobiles simples, et comme une famille de pôles mobiles peut ou non conduire à une identité entre les coefficients de (5), nous avons en comptant $\alpha a^2 + \beta b \equiv 0$ au plus 3 relations identiquement vérifiées.

2°) $a(x) \equiv b(x) \equiv 0$, $e(x) \not\equiv 0$, une famille de pôles doubles mobiles, donc comprenant $a(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv 0$ au plus 3 relations.

3°) $a(x) \equiv b(x) \equiv e(x) \equiv 0$. Cela fait exactement 3 relations. Je vais montrer ici comment ce dernier cas, où nous avons cessé d'aller plus loin, se rattache lui-même à l'existence de pôles mobiles: je développe l'équation (5) suivant les puissances décroissantes de y: elle est alors (n entier $\gtreqless 0$, $\neq 0$, $\neq -1$ mais pouvant être ∞)

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + a_1(x)\frac{y'^2}{y^2} + a_2(x)\frac{y'^2}{y^3} + \cdots$$

$$+ b_1(x)y' + b_2(x)\frac{y'}{y} + b_3(x)\frac{y'}{y^2} + \cdots$$

$$+ e_1(x)y + e_2(x) + \frac{e_3(x)}{y} + \cdots$$

Si l'on admet l'existence d'un pôle, on a en appelant i l'ordre de ce pôle et en prenant le terme de degré le plus élevé dans chaque ligne: à la première deux termes de degré polaire $i+2$, à la seconde un de degré $i+1$, à la 3ème un de degré i: les deux termes de degré $i+2$ se détruiront donc, d'où la relation $i = -n$; donc le pôle ne peut exister que si n est fini et négatif: je fais $y = z^n$ et vérifie que z vérifie une équation du second ordre pour laquelle $z = 0$ est une valeur ordinaire; donc pour $x = x_0$ il existe une intégrale z pour laquelle $z_0 = 0$

et z'_0 est arbitraire, autrement dit l'équation (5) admet l'intégrale $y = \frac{\lambda}{(x - x_0)^{-n}} + \cdots$ où λ est arbitraire.

En répétant cette étude pour $y = 0$, 1 ou x s'il y a lieu, on voit donc qu'on obtient un nombre fini de relations différentielles algébriques entre les coefficients de l'équation (5), par un procédé régulier de calcul.

8. — Le résultat très remarquable obtenu pour les équations du second ordre et du premier degré, rationnelles en y, est que l'ensemble des conditions nécessaires obtenues par ce procédé est en même temps suffisant pour que l'intégrale soit à points critiques fixes.

Dans le cas où l'équation contient y non plus rationnellement, mais algébriquement, sans être susceptible d'être ramenée à une autre où y figure rationnellement, c'est-à-dire où la relation $H(y, u) = 0$ dont il a été question plus haut est de genre 1, il n'en est plus de même, comme M. Painlevé l'avait montré pour l'équation

$$y'' = y'^2 \left\{ \frac{y[2k^2 y - (1 + k^2)]}{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)} + \frac{1}{\lambda \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} \right\};$$

sur cet exemple, l'intégration seule montre qu'on doit écrire une relation cette fois *transcendante* et non plus *algébrique*, que la méthode précédente ne peut donner.

9. *Formation explicite de toutes les équations* (1) *à points critiques fixes.*

Les équations indiquées par M. Painlevé étaient explicitement connues, par exemple $y'' = 6y^2$, $y'' = 6y^2 - \frac{1}{24}$ ou $y'' = 6y^2 + x$, sauf une seule équation

$$\text{(E)} \qquad y'' = -yy' + y^3 - 12\,q(x)\,y + 12\,q'(x)$$

où $q(x)$ vérifie l'équation $q'' = 6q^2 + x$ qui est l'une de celles précédemment citées. Si donc on regarde comme connues les transcendantes engendrées par les équations *algébriques* du $2^{\text{ème}}$ ordre et du 1^{er} degré à points critiques fixes, cette équation (E) est donnée explicitement.

Mais dans les cas nouveaux que j'ai mis en évidence je rencontrais des systèmes de conditions différentielles dont l'intégration était, quoiqu'au fond bien simple, assez difficile à apercevoir. Prenons par exemple l'équation

$$y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2 + \left(ay + \frac{b}{y} - \frac{c}{y-1} + d\right) y' +$$

$$+ y(y-1)\left[3a^2 y + \frac{3b^2}{y^2} - \frac{3c^2}{(y-1)^2} + h + \frac{k}{y} + \frac{l}{y-1}\right].$$

Sur cette forme d'équation où $a, b, \ldots l$ désignent 7 fonctions analytiques de x on a déjà exprimé toutes les conditions que l'on peut obtenir par les équations simplifiées. Il y a ensuite à étudier les valeurs singulières ∞, 0, 1 de y: il y a deux familles de pôles mobiles donnant chacune une relation, de même deux familles de *zéros* et *d'unités* mobiles, donnant chacune une relation; on obtient ainsi le système

$$(11)\quad \begin{cases} h + 3(ad + a^2 - a') = 0 \\ k + 3(bd + bc + b^2 - b') = 0 \\ l + 3(ca + cb + cd + c^2 - c') = 0 \\ (2h + 3a^2)^2 + 6(ah' - 2ha') - 9a^3(b-c) + 6a^2(k+l) = 0 \\ (2k + 3b^2)^2 + 6(bk' - 2kb') - 9b^3(a+c) + 6b^2(h - l - 3c^2) = 0 \\ (2l + 3c^2)^2 + 6(cl' - 2lc') - 9c^3(b-a) + 6c^2(-3a^2 - h - k - 3b^2) = 0. \end{cases}$$

On verra plus loin comment ces 6 équations permettent d'exprimer les 7 fonctions inconnues au moyen d'une fonction auxiliaire arbitraire et de plus cet exemple montre d'une façon frappante comment, par un mécanisme qui est général, mais qui il était difficile de prévoir, la résolution de ce premier problème, intégration des conditions telles que (11) est intimement liée à l'intégration de l'équation différentielle (1) elle même quand cette intégration est possible ou à la réduction de l'équation à un des 6 types irréductibles I à VI.

D'une manière précise, les relations nécessaires [(11) ou analogues] se laissent intégrer explicitement, en ne considérant comme connus que les éléments analytiques suivants: fonctions rationnelles, exponentielles ou elliptiques, intégrales des 6 équations irréductibles que j'ai données plus haut.

Ces relations *nécessaires* sont d'ailleurs *suffisantes*: toute équation du second ordre répondant à ces conditions se ramène soit à une équation linéaire (d'ordre 2, 3 ou 4) soit à une équation intégrable (par quadratures, ou par les fonctions elliptiques et dégénérescences), soit à l'un des 6 types irréductibles I à VI.

Pour les équations intégrables, la fixité des points critiques résulte de l'intégration même, pour les autres elle résulte de ce fait que les 6 équations irréductibles I à VI ont, comme nous l'avons dit, leurs points critiques fixes.

Je citerai, parmi celles dont l'intégration etait le plus cachée les équations

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + \left(ay + b + \frac{c}{y}\right)y' - \frac{na^2}{(n+2)^2}y^3 + ey^2 + fy + g + \frac{h}{y}$$

pour lesquelles j'ai d'ailleurs donné deux méthodes d'intégration.

10. — Je vais maintenant donner plusieurs tableaux de types canoniques, différents suivant le but que l'on se propose.

Je donne d'abord un tableau T d'équations, $Y'' = F(Y', Y, X)$ ou F est rationnel en Y et Y', qui permet d'obtenir toutes les équations $y'' = f(y', y, x)$ où f est rationnel en y et y', dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.[1]

Si dans le tableau T qui va suivre j'effectue la transformation homographique la plus générale

$$Y = \frac{l(x)y + m(x)}{p(x)y + q(x)}, \quad X = \varphi(x),$$

où l, m, p, q, φ sont des fonctions analytiques quelconques de x j'obtiens toutes les équations du second ordre et du premier degré en y', rationnelles en y dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.

Ces équations du tableau T sont de la forme

$$Y'' = A(Y, X)\,Y'^2 + B(Y, X)\,Y' + C(Y, X),$$

où A est l'une des 8 expressions θ'.

Dans ce qui suit α, β, γ, δ, ε sont des constantes numériques; $q(X)$, $r(X)$, ... des fonctions analytiques de X.

$A \equiv 0$

(1) $Y'' = 0$

(2) $Y'' = 6\,Y^2$

(3) $Y'' = 6\,Y^2 - \frac{1}{24}$

(4) $Y'' = 6\,Y^2 + X$

(5) $Y'' = -3\,YY' - Y^3 + q(X)(Y' + Y^2)$

(6) $Y'' = -2\,YY' + q(X)\,Y + q'(X)\,Y$

(7) $Y'' = 2\,Y^3$

(8) $Y'' = 2\,Y^3 + \alpha Y + \beta$

[1] Je rappelle que le cas où f est rationnel en y a seul besoin d'être complété. C'est le seul dont je m'occupe dans tout ce mémoire.

(9) $Y'' = 2\,Y^3 + XY + \alpha$

(10) $Y' = -\,YY' + Y^3 - 12\,q(X)Y + 12\,q'(X)$ avec $q''_{X^2} = 6\,q^2 + S,\ S = 0,\ \frac{-1}{24}$ ou X.

$A = \frac{1}{Y}$[1]

(11) $Y'' = \frac{Y'^2}{Y}$

(12) $Y'' = \frac{Y'^2}{Y} + \alpha Y^3 + \beta Y^2 + \gamma + \frac{\delta}{Y}$

(13) $Y'' = \frac{Y'^2}{Y} - \frac{Y'}{X} + \frac{1}{X}(\alpha Y^2 + \beta) + \gamma Y^3 + \frac{\delta}{Y}$

(14) $Y'' = \frac{Y'^2}{Y} + q\frac{Y'}{Y} - q' + rYY' + r'Y^2$

(15) $Y'' - \frac{Y'^2}{Y} + \frac{Y'}{Y} + rY^2 - Y\frac{d}{dX}\frac{r'}{r}$

(16) $Y'' = \frac{Y'^2}{Y} - q'\,YY' - q''\,Y^2 + q - \frac{1}{Y}$

$A \equiv \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{Y}$, n entier > 1

(17) $Y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y}$

(18) $Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + 4\,Y^2$

(19) $Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + 4\,Y^2 + 2\,Y$

(20) $Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + 4\,Y^2 + 2\,XY$

(21) $Y'' = \frac{3}{4}\frac{Y'^2}{Y} + 3\,Y^2$

(22) $Y'' = \frac{3}{4}\frac{Y'^2}{Y} - 1$

(23) $Y'' = \frac{3}{4}\frac{Y'^2}{Y} + 3\,Y^2 + \alpha Y + \beta$

[1] Ces 2 tableaux pour $A = 0$ et $A = \frac{1}{Y}$ étaient complets chez M. Painlevé; je les reproduis ici pour la clarté de ce qui suit. Les modifications que j'ai apportées à ces 2 tableaux m'ont été suggérées aussi pour la simplification des équations que j'ajoute dans les autres tableaux.

$$(24) \quad Y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y} + qYY' - \frac{nq^2}{(n+2)^2}Y^3 + \frac{nq'}{n+2}Y^2$$

$$(25) \quad Y'' = \frac{3}{4}\frac{Y'^2}{Y} - \frac{3}{2}YY' - \frac{Y^3}{4} + \frac{q'}{2q}(Y' + Y^2) + rY + q$$

$$(26) \quad Y'' = \frac{3}{4}\frac{Y'^2}{Y} + 6q'\frac{Y'}{Y} + 3Y^2 + 12qY - 12q'' - \frac{36q'^2}{Y}, \quad q'' = 6q^2 + S, \quad S = 0, \ \frac{-1}{24} \text{ ou } X$$

$$(27) \quad Y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y} + f_n(q, r)YY' + \varphi_n(q, r)Y' - \frac{n-2}{n}\frac{Y'}{Y} - \frac{nf_n^2}{(n+2)^2}Y^3$$
$$+ \frac{n[f'_n - f_n\varphi_n]}{n+2}Y^2 + \psi_n(q, r)Y - \varphi_n - \frac{1}{nY}$$

(f_n, φ_n, ψ_n étant 3 fonctions rationnelles de 2 fonctions arbitraires q, r et de leurs dérivées dont le calcul sera indiqué dans le texte, page 54)

$$(28) \quad Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} - YY' + qY' + \frac{Y^3}{2} - 2qY^2 + 3\left(q' + \frac{q^2}{2}\right)Y - \frac{72r^2}{Y}$$

$\Bigg($avec $r = \dfrac{V_2 - V_1}{2}$, $q = \dfrac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_2}$ et V_1 et V_2 étant deux intégrales quelconques de $V'' - 6V^2 + S$, $S = 0$, $\dfrac{-1}{24}$ ou $X\Bigg)$

$$(29) \quad Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + \frac{3Y^3}{2}$$

$$(30) \quad Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + \frac{3Y^3}{2} + 4\alpha Y^2 + 2\beta Y - \frac{\gamma^2}{2Y}$$

$$(31) \quad Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + \frac{3Y^3}{2} + 4XY^2 + 2(X^2 - \alpha)Y - \frac{\beta^2}{2Y}$$

$$(32) \quad Y'' = \frac{Y'^2 - 1}{2Y}$$

$$(33) \quad Y'' = \frac{Y'^2 - 1}{2Y} + 4Y^2 + \alpha Y$$

$$(34) \quad Y'' = \frac{Y'^2 - 1}{2Y} + 4\alpha Y^2 - XY$$

$$(35) \quad Y'' = \frac{2}{3}\frac{Y'^2}{Y} - \frac{2}{3}YY' + \frac{2q}{3}Y' + r\frac{Y'}{Y} + \frac{2}{3}Y^3 - \frac{10q}{3}Y^2 + \left(4q' - r + \frac{8q^2}{3}\right)Y$$
$$+ 3\left[\frac{2qr}{3} - r'\right] - \frac{3r^2}{Y}$$

où l'on a $q'' = 2\,q^3 + Sq + T$, $r = -\frac{S}{3} - \frac{2}{3}(q' + q^2)$ et $2\,q^3 + Sq + T$ désigne l'une quelconque des 3 expressions $2\,q^3$, $2\,q^3 + \alpha q + \beta$, $2\,q^3 + Xq + \alpha$

$$(36)\quad Y'' = \frac{4}{5}\frac{Y'^2}{Y} - \frac{2}{3}\,YY' - \frac{q}{5}\,Y' + r\frac{Y'}{Y} + \frac{4}{5}\,Y^3 + \frac{14\,q}{5}\,Y^2 + \left(r - 3\,q' + \frac{6\,q^2}{5}\right)Y - \frac{q\,r}{3} - \frac{5\,r'}{3} - \frac{5\,r^2}{9\,Y}$$

$$\text{avec } q = \frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}, \quad r = \frac{72}{5}\,V_1 + \frac{36}{5}\,V_2 + \frac{9}{5}\left[\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}\right]^2$$

V_1 et V_2 désignant 2 intégrales quelconques de $V'' = 6\,V^2 + S$, $S = 0, -\frac{1}{24}$ ou X.

Si V_2 tend vers V_1 (cette remarque s'applique à tous les cas analogues) que faut-il entendre par $\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}$? Soit $V(X, \alpha, \beta)$ l'intégrale générale de $V'' = 6\,V^2 + X$ par exemple; V_1 est obtenu en donnant à α et β les valeurs numériques α_1 et β_1; soit de même $\frac{\partial V}{\partial \alpha}(X, \alpha, \beta)$ j'appellerai $\frac{\partial V_1}{\partial \alpha}(X, \alpha, \beta)$ cette dérivée où j'ai remplacé α et β par α_1 et β_1: dans ces conditions si V_2 tend vers V_1 on considérera $\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}$ comme représentant $\dfrac{\lambda \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha \partial X} + \mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial \beta \partial X}}{\lambda \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial V_1}{\partial \beta}}$ où λ et μ sont deux constantes numériques arbitraires.

$$A = \frac{1}{2\,Y} + \frac{1}{Y - 1}$$

$$(37)\quad Y'' = Y'^2\left(\frac{1}{2\,Y} + \frac{1}{Y - 1}\right)$$

$$(38)\quad Y'' = Y'^2\left(\frac{1}{2\,Y} + \frac{1}{Y - 1}\right) + Y(Y - 1)\left[\alpha(Y - 1) + \beta\frac{(Y - 1)}{Y^2} + \frac{\gamma}{Y - 1} + \frac{\delta}{(Y - 1)^2}\right]$$

$$(39)\quad Y'' = Y'^2\left(\frac{1}{2\,Y} + \frac{1}{Y - 1}\right) - \frac{Y'}{X} + \frac{(Y - 1)^2}{X^2}\left(\alpha Y + \frac{\beta}{Y}\right) + \gamma\frac{Y}{X} + \frac{\delta Y(Y + 1)}{Y - 1}$$

$$(40)\quad Y'' = Y'^2\left(\frac{1}{2\,Y} + \frac{1}{Y - 1}\right) + \frac{2(qY + r)}{Y - 1}\,Y' + \frac{(Y - 1)^2}{2}\left(s^2\,Y - \frac{t^2}{Y}\right) - 2\,[q^2 - r^2 - (q' + r')]\,Y$$

$$\text{avec } s' - 2\,qs = 0,\quad t' + 2\,tr = 0$$

$$A = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right)$$

$$(41)\qquad Y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2$$

$$(42)\qquad Y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2 + \left[qY + \frac{r}{Y} - \frac{s}{Y-1} - \frac{q+r+s}{2}\right] Y'$$

$$+ Y(Y-1)\left[3q^2 Y + \frac{3r^2}{Y^2} - \frac{3s^2}{(Y-1)^2} + 3q' + \frac{3q}{2}(r+s-q) + \frac{3r' - \frac{3r}{2}(r+s-q)}{Y} + \right.$$

$$\left. + \frac{3s' - \frac{3s}{2}(q+s+r)}{Y-1}\right]$$

avec

$$3q = \frac{V'}{V} - V - \frac{E}{V} - 2C$$

$$3r = \frac{V'}{V} + V + \frac{E}{V} + 2C$$

$$3s = 2V$$

$$V'' = \frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3 + 4CV^2 + 2DV - \frac{E^2}{2V}$$

cette dernière équation représentant l'une quelconque des équations rencontrées précédemment

$$V'' = \frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3$$

$$V'' = \frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3 + 4\alpha V^2 + 2\beta V - \frac{\gamma^2}{2V}$$

$$V'' = \frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3 + 4XV^2 + 2(X^2-\alpha)V - \frac{\beta^2}{2V}.$$

$$A = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2$$

$$(43)\qquad Y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2$$

$$(44)\qquad Y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2 + Y(Y-1)\left[\frac{\alpha}{Y} + \frac{\beta}{Y-1} + 2\gamma(2Y-1)\right]$$

$$(45)\quad Y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2 + \left(a + \frac{b}{Y} - \frac{c}{Y-1}\right) Y' +$$

$$+ Y(Y-1)\left[8 D^2 \left(Y - \frac{1}{2}\right) + \frac{b^2}{Y^2} - \frac{c^2}{(Y-1)^2} + \frac{h}{Y} + \frac{k}{Y-1}\right]$$

$$\text{avec } D = \frac{V_2 - V_1}{2},\quad b - c = -\frac{3}{2}(V_1 + V_2),\quad a = \frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1},$$

$$b + c = -\frac{3}{2}\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1},$$

$$h = 2b' + ab,\quad k = 2c' + ac$$

et V_1, V_2 étant deux intégrales quelconques de l'une des 3 équations $V'' = 2V^3$ ou $V'' = 2V^3 + \alpha V + \beta$, $V'' = 2V^3 + XV + \alpha$.

$$(46)\quad Y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2 - \left[\frac{h'}{h} + \frac{3}{2}\frac{h'}{h}\frac{1}{Y-1}\right] Y' +$$

$$+ \left[\frac{8\beta^2}{h^2}\left(Y - \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{h'}{h}\right)^2 \frac{1}{(Y-1)^2} + \frac{h}{Y} + \left(\frac{3h''}{h} - \frac{9h'^2}{2h^2}\right)\frac{1}{Y-1}\right] Y(Y-1)$$

$$\text{avec } q'' = 2q^3 + \alpha q + \beta,\quad h = 2(q' + q^2) + \alpha$$

$$(47)\quad Y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2 - \frac{h'}{h}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{1}{Y-1}\right] Y'$$

$$+ \left[\frac{8\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2}{h^2}\left(Y - \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{h'}{h}\right)^2 \frac{1}{(Y-1)^2} + \frac{h}{Y} + \left(\frac{3h''}{h} - \frac{9h'^2}{2h^2}\right)\frac{1}{Y-1}\right] Y(Y-1)$$

$$\text{avec } q'' = 2q^3 + Xq + \alpha,\quad h = 2(q' + q^2) + X.$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-\alpha}\right)$$

$$(48)\quad Y'' = \frac{Y'^2}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-\alpha}\right) +$$

$$+ Y(Y-1)(Y-\alpha)\left[\frac{\beta}{Y^2} + \frac{\gamma}{(Y-1)^2} + \frac{\delta}{(Y-\alpha)^2} + \varepsilon\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-X}\right)$$

$$(49)\quad Y'' = \frac{Y'^2}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-X}\right) - Y'\left[\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{Y-X}\right]$$

$$+ \frac{Y(Y-1)(Y-X)}{2X^2(X-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta X}{Y^2} + \frac{\gamma(X-1)}{(Y-1)^2} + \frac{(\delta-1)X(X-1)}{(Y-X)^2}\right]$$

$$A \equiv \frac{2}{3\,Y} + \frac{1}{2(Y-1)}$$

$$(50)\quad Y'' = Y'^2\left(\frac{2}{3\,Y} + \frac{1}{2(Y-1)}\right) + \left(aY + b + \frac{c}{Y}\right)Y' + \\ + \left[\frac{3\,a^2}{8}Y + f + \frac{3\,c^2}{Y^2} + \frac{h}{(Y-1)^2} + \frac{k}{Y} + \frac{h}{3(Y-1)}\right]Y(Y-1)$$

$$\text{avec } a = -\frac{10}{9}(t+u),\ c = -\frac{4}{9}(u-2\,t),\ b = \frac{2\,t+5\,u}{9},\ h = -\frac{9\,H^2}{2},$$

$$2\,k = 6(c'-bc) - 3\,c^2, \quad f = \frac{3}{2}(a'-ab) - \frac{3\,a^2}{4},$$

$$t = \left[\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1} + \frac{V'_3 - V'_1}{V_3 - V_1}\right], \quad H = \left[\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1} - \frac{V'_3 - V'_1}{V_3 - V_1}\right], \quad u = -\frac{H'}{H}$$

V_1, V_2, V_3 étant 3 intégrales particulières de $V'' = 6\,V^2 + S$, $S = 0$, $\frac{-1}{24}$, ou X.[1]

11. — Problème inverse.

Etant donnée une équation $y'' = P(y', y, x)$ où P est rationnel en y' et y comment reconnaître si elle a ses points critiques fixes?

Il suffit de vérifier si une transformation

$$Y = \frac{l(x)y + m(x)}{p(x)y + q(x)}, \quad X = \varphi(x)$$

permet de ramener l'équation à l'une des formes donnée dans le tableau T. Mais comment se calculent les coefficients l, m, p, q, φ de cette transformation?

Pour les transcendantes irréductibles, l, m, p, q, φ sont des combinaisons algébriques de l'équation proposée. Mais pour les autres il n'en est plus de même, au moins en général; l, m, p, q s'expriment algébriquement au moyen de φ et φ'; quant à la fonction φ elle est donnée soit par une ou deux quadratures soit par l'intégration d'une équation différentielle du second ordre. Les opérations qu'exige le calcul de cette transformation sont d'ailleurs les mêmes que celles qu'exige l'intégration de l'équation elle même: intégration qui se ramène,

[1] Si V_2 ou V_3 tendent vers V_1, ou si V_2 et V_3 tendent simultanément vers V_1 ou si V_3 tend vers V_2, on aura à trouver pour t, H ou u les valeurs limites de quotients de fonctions prenant la forme $\frac{0}{0}$. Cette limite sera indiquée dans le texte et se fait comme il a été indiqué précédemment, page 15. On voit que pour l'équation (50) il y aura un nombre considéra de types particuliers

nous l'avons vu, soit à des quadratures soit à l'intégration d'une équation linéaire d'ordre 4 au plus.

Il est alors plus avantageux, pour traiter le problème inverse, de dresser un nouveau tableau Θ des types canoniques auxquels les équations $y'' = P(y', y, x)$ se laissent ramener algébriquement par une transformation

$$\eta = \frac{\lambda(x)y + \mu(x)}{\pi(x)y + \chi(x)}, \quad \xi = \varphi(x)$$

λ, μ, π, χ, φ se calculant cette fois algébriquement. Ce tableau Θ est trop considérable pour pouvoir le donner explicitement: il faudrait reprendre chacune des 50 types du tableau T et lui faire correspondre dans le tableau Θ un certain nombre d'équations en nombre considérable: la dernière équation (50) par exemple conduit à plus de 100 types. — Les équations (28), (35), (36), (42), (45), (46), (47) donnent aussi un nombre considérable d'équations correspondantes dans le tableau Θ.

Je me bornerai donc à prendre comme exemple les équations (29), (30), (31). Le raisonnement étant le même pour toutes, le genre de calcul le même, il suffira de quelques indications rapides pour permettre de reconstituer les types Θ dans tous les cas.

12. — Je vais maintenant extraire du tableau T un tableau (t), dont il suffit d'indiquer la nature de chaque équation pour en déduire immédiatement la nature de toutes les équations T et en donner l'intégration effective, quand on regarde comme complètement connus les éléments analytiques du tableau (t). C'est le tableau suivant[1]

(1) $$Y'' = 0$$

(2) $$Y'' = 6\,Y^2$$

(3) $$Y'' = 6\,Y^2 - \frac{1}{2}$$

(4) $$Y'' = 6\,Y^2 + X$$

(5) $$Y'' = -3\,Y\,Y' - Y^3 + q(X)(Y' + Y^2)$$

(6) $$Y'' = -2\,Y\,Y' + q(X)\,Y' + q'(X)\,Y$$

(7) $$Y'' = 2\,Y^3$$

(8) $$Y'' = 2\,Y^3 + \alpha\,Y + \beta$$

[1] Voir pour chaque équation (t) ce qui en a été dit au tableau T.

(9) $Y'' = 2\,Y^3 + X\,Y + \alpha$

(10) $Y'' = \dfrac{Y'^2}{Y}$

(11) $Y'' = \dfrac{Y'^2}{Y} + \alpha\,Y^3 + \beta\,Y^2 + \gamma + \dfrac{\delta}{Y}$

(12) $Y'' = \dfrac{Y'^2}{Y} - \dfrac{Y'}{X} + \dfrac{1}{X}(\alpha\,Y^2 + \beta) + \left(\gamma\,Y^3 + \dfrac{\delta}{Y}\right)$

(13) $Y'' = \dfrac{Y'^2}{Y} + q\,\dfrac{Y'}{Y} - q' + r\,Y\,Y' + r'\,Y^2$

(14) $Y'' = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{Y'^2}{Y} + q'\,Y\,Y - \dfrac{nq^2}{(n+2)^2}\,Y^3 + \dfrac{nq'}{n+2}\,Y'$

(15) $Y'' = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{Y'^2}{Y} + f_n(q,\ r)\,Y\,Y' + \varphi_n(q,\ r)\,Y' - \dfrac{n-2}{n}\,\dfrac{Y'}{Y} - \dfrac{n\,f_n^2}{(n+2)^2}\,Y^3$

$$+ \frac{n(f'_n - f_n\varphi_n)}{n+2}\,Y^2 + \psi_n(q,\ r)\,Y - \varphi_n - \frac{1}{n\,Y}$$

(16) $Y'' = \dfrac{Y'^2}{2\,Y} + \dfrac{3\,Y^3}{2}$

(17) $Y'' = \dfrac{Y'^2}{2\,Y} + \dfrac{3\,Y^3}{2} + 4\,\alpha\,Y^2 + 2\,\beta\,Y - \dfrac{\gamma^2}{2\,Y}$

(18) $Y'' = \dfrac{Y'^2}{2\,Y} + \dfrac{3\,Y^3}{2} + 4\,X\,Y^2 + 2(X^2 - \alpha)\,Y - \dfrac{\beta^2}{2\,Y}$

(19) $Y'' = \dfrac{Y'^2 - 1}{2\,Y}$

(20) $Y'' = Y'^2\left(\dfrac{1}{2\,Y} + \dfrac{1}{Y-1}\right)$

(21) $Y'' = Y'^2\left(\dfrac{1}{2\,Y} + \dfrac{1}{Y-1}\right) + Y\,(Y-1)\left[\alpha(Y-1) + \beta\,\dfrac{(Y-1)}{Y^2} + \dfrac{\gamma}{Y-1} + \dfrac{\delta}{(Y-1)^2}\right]$

(22) $Y'' = Y'^2\left(\dfrac{1}{2\,Y} + \dfrac{1}{Y-1}\right) - \dfrac{Y'}{X} + \dfrac{(Y-1)^2}{X^2}\left(\alpha\,Y + \dfrac{\beta}{Y}\right) + \gamma\,\dfrac{Y}{X} + \dfrac{\delta\,Y(Y+1)}{Y-1}$

(23) $Y'' = \dfrac{Y'^2}{2}\left(\dfrac{1}{Y} + \dfrac{1}{Y-1} + \dfrac{1}{Y-\alpha}\right) +$

$$+ Y\,(Y-1)(Y-\alpha)\left[\beta + \frac{\gamma}{Y^2} + \frac{\delta}{(Y-1)^2} + \frac{\varepsilon}{(Y-\alpha)^2}\right]$$

$$(24)\quad Y'' = \frac{Y'^2}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-X}\right) - Y'\left[\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{Y-X}\right]$$
$$+ \frac{Y(Y-1)(Y-X)}{2X^2(X-1)^2}\left[\alpha - \beta\frac{X}{Y^2} + \gamma\frac{(X-1)}{(Y-1)^2} - \frac{(\delta-1)X(X-1)}{(Y-X)^2}\right].$$

Remarquons en passant que les coefficients de toutes les équations (t) sont explicitement connus. Ces coefficients sont rationnels en X, sauf pour 5 d'entre elles: (5), (6), (13), (14), (15) où figurent des fonctions analytiques q, r arbitraires de X et leurs dérivées jusqu'à un ordre fini. Ces 5 équations sont d'ailleurs intégrables.

13. — Toute équation de T non contenue dans (t) dérive d'une équation du tableau (t) par le procédé suivant.

Pour abréger le langage j'appellerai équation *secondaire* l'équation $Y'' = p(Y', Y, X)$ considérée dans T et $V'' = P(V', V, X)$, l'équation de (t) à laquelle elle se ramène, (pour la clarté j'ai remplacé Y par V pour l'équation de t), sera dite équation *primaire*.

J'apprends à former pour l'équation secondaire $Y'' = p(Y', Y, X)$ une fonction $V = F(Y', Y, X)$ rationnelle en Y' et Y telle qu'inversement j'aie $Y = \varphi(V', V, X)$, φ étant rationnelle en V' et V. Le système différentiel

$$\begin{cases} V = F(Y', Y, X) \\ Y = \varphi(V', V, X) \end{cases}$$

équivaut à l'équation secondaire, qu'on obtient par élimination de V, tandis que l'élimination de Y conduit à l'équation primaire.

Or l'équation primaire a ses coefficients explicitement connus; voyons comment on obtient les coefficients des fractions rationnelles $\varphi(V', V, X)$, $F(Y', Y, X)$ et $p(Y', Y, X)$: Appelons $V(X, a, \beta)$ l'intégrale générale du type canonique primaire et V_j l'intégrale particulière correspondant aux valeurs numériques α_j et β_j données à α et β; soient de même $\frac{\partial V_j}{\partial X}, \frac{\partial V_j}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 V_j}{\partial\alpha\partial\beta}, \frac{\partial^2 V_j}{\partial X \partial\alpha}, \ldots$ les dérivées de V où l'on fait $\alpha = \alpha_j$, $\beta = \beta_j$; la fonction $\varphi(V', V, X)$ rationnelle en V et V' a pour coefficients des combinaisons rationnelles de 3 (au plus) intégrales particulières V_j, soient V_1, V_2 et V_3 et des dérivées $\frac{\partial V_j}{\partial X}, \frac{\partial V_j}{\partial \alpha}, \cdots \frac{\partial^2 V_j}{\partial X \partial \alpha}, \cdots$ les dérivées étant au plus du 3ème ordre; or quand on fait sur l'équation primaire $V'' = P(V', V, X)$ une telle transformation $Y = \varphi(V', V, X)$ il est bien clair que l'équation secondaire obtenue $Y'' = p(Y', Y, X)$ a ses coefficients nécessairement transcendants et que ces coefficients s'expriment d'une façon toute sembable au moyen

de V_1, V_2, V_3. C'est ce que l'on constate immédiatement sur le tableau T. Ceci explique aussi ce que j'annonçais au paragraphe 9, à savoir que la détermination des coefficients des équations étudiées [c'est-à-dire intégration de systèmes différentiels tels que 11] et que l'intégration de l'équation elle même, si cette intégration est possible, ou la réduction de cette équation à un type irréductible, constituent en réalité le même problème: tant qu'on n'avait pas aperçu cette identité des 2 questions, difficile à priori à apercevoir, les efforts pour résoudre l'une ou l'autre devaient rester stériles.

14. *Conclusion.* Il est très remarquable que les équations $y'' = R(y', y, x)$ où R est rationnel en y', algébrique ou rationnel en y dont l'intégrale générale est à points critiques fixes puissent être définies *explicitement* soit à l'aide de types canoniques *algébriques* soit à l'aide de types canoniques renfermant la variable X sous forme transcendante mais alors exprimables rationnellement au moyen des transcendantes engendrées par les types canoniques algébriques.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici à M. Painlevé toute la reconnaissance que je lui dois pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués au cours de mes recherches.

CHAPITRE I.

Equations $y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + B(y, x)y' + C(y, x)$.

1. — B et C doivent être des fractions rationnelles en y n'ayant d'autre pôle que $y = 0$, donc $B = \frac{P(y, x)}{y}$, $C = \frac{Q(y, x)}{y}$ où P et Q sont deux polynômes en y. La transformation $yY = 1$ montre immédiatement que P est du second degré, Q du $3^{\text{ème}}$. On peut donc écrire l'équation sous la forme ($a, b, \ldots h$ étant analytiques en x),

$$(1) \qquad y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + y'\left(ay + b + \frac{c}{y}\right) + dy^3 + ey^2 + fy + g + \frac{h}{y};$$

si l'on pose $yY = 1$ elle devient

$$(2) \qquad Y'' = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y} + Y'\left(cY + b + \frac{a}{Y}\right) - hY^3 - gY^2 - fY - e - \frac{d}{Y^3}.$$

Ceci montre bien qu'il est inutile de considérer les valeurs négatives de l'entier n; pourtant dans la discussion il y a quelquefois avantage à laisser indéterminé le signe de n: ceci permettra par exemple de déduire immédiatement l'étude de la valeur $y = 0$ de l'étude de $y = \infty$: car en appliquant les résultats trouvés pour $y = \infty$ à l'équation (2) on obtient les résultats relatifs à $y = 0$ pour l'équation (1). Ce n'est qu'en fin de discussion que l'on se bornera au cas de n positif.

La *simplifiée* que l'on doit former avant l'étude de $y = \infty$ s'obtient par $x = x_0 + \alpha X$, $Y = \alpha y$, substituant dans (1) et annulant ensuite α. On a $[a_0 = a(x_0)$, $d_0 = d(x_0)]$.

$$(3) \qquad y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + a_0 yy' + d_0 y^3.$$

Je pose $y' = uy^2$, comme j'ai dit dans l'introduction, d'où l'équation

$$(4) \qquad \frac{u''}{u'^2} = \frac{-\left(\frac{1}{n} + 1\right)2u + a_0}{-\left(\frac{1}{n} + 1\right)u^2 + a_0 u + d_0} + \frac{u}{-\left(1 + \frac{1}{n}\right)u^2 + a_0 u + d_0}.$$

Il suffit de décomposer le second membre de (4) en éléments simples, ce qui est immédiat pour la 1^{ère} fraction, puis d'exprimer que ce second membre a l'une des formes de Briot et Bouquet: il suffit dans les expressions θ données plus haut, page 2 de remplacer y par u. La discussion est extrêmement simple, en remarquant qu'ici je ne peux avoir que deux fractions au plus et que la somme des résidus est égale à $1 + \frac{1}{n+1}$. Si par exemple je veux avoir la 6ème forme de θ je dois la réduire à $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{u-\alpha} + \frac{1}{u-\beta}\right)$ et alors j'ai immédiatement $n = 2$, $a_0 = 0$ c'est-à-dire $n = 2$, $a(x) = 0$ et de même dans les autres cas. Je donne ici le résumé de la discussion.

2. Si n est quelconque on peut avoir l'une ou l'autre des hypothèses suivantes

$$a(x) = d(x) = 0 \quad \text{ou} \quad d(x) = -\frac{n\,a^2(x)}{(n+2)^2}.$$

Il existe trois valeurs particulières de n qui, en outre de l'une ou l'autre de ces hypothèses, peuvent donner d'autres hypothèses admissibles:

Pour $n=2$ on peut avoir ou $a(x)\equiv 0,\ d \not\equiv 0$ ou $d(x)\equiv \frac{a^2}{2}$.

Pour $n=3$ on peut avoir $d\equiv \frac{3a^2}{2}$.

Pour $n=5$ on peut avoir $d\equiv 5a^2$.

D'après la remarque faite plus haut cette discussion sert en même temps à indiquer les relations possibles entre c et h qui sont:

pour n quelconque ou $c\equiv h\equiv 0$ ou $h=-\frac{n c^2}{(n-2)^2}$ et pour $n=2$ ou $c\equiv h\equiv 0$ ou $c\equiv 0,\ h\not\equiv 0$. On remarquera d'ailleurs qu'ici le cas de $n=2$ ne donne somme toute rien de distinct, pour c et h, du cas de n quelconque.

3. Si l'on a $a\equiv d\equiv 0$, il faut former la seconde simplifiée en substituant $x=x_0+\alpha X,\ Y=\alpha^2 y$ dans (1):

$$Y''=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y}+e_0 Y^2. \tag{5}$$

$e(x)\equiv 0$ est une solution acceptable, sinon on pose $Y'=n u Y$ d'où $e_0 Y=n[u'+u^2]$, $u''=(n-2)uu'+nu^3$. Cette équation en u donne, d'après les résultats de M. Painlevé les 3 cas: $n=2,\ n=4,\ n=-4$, en écartant $n=\pm 1$.

Donc $a\equiv d\equiv 0$ entraîne $e\equiv 0$ sauf si $n=2$ ou si $n=4$ et de même $c\equiv h\equiv 0$ entraîne $g\equiv 0$ sauf si $n=4$.

4. Les résultats précédents conduisent à écrire 14 types et 14 seulement d'équations à étudier

$$(1)\quad \begin{cases} y''=\frac{y'^2}{y}\left(1-\frac{1}{n}\right)+b y'+f y \\[2ex] y''=\frac{y'^2}{2y}+b y'+e y^2+f y \\[2ex] y''=\frac{3y'^2}{4y}+b y'+e y^2+f y+g \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y''=\frac{y'^2}{y}\left(1-\frac{1}{n}\right)+(a y+b)y'-\frac{n a^2}{(n+2)^2}y^3+e y^2+f y \\[2ex] y''=\frac{3y'^2}{4y}+(a y+b)y'-\frac{a^2}{9}y^3+e y^2+f y+g \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} y''=\frac{y'^2}{y}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(b+\frac{c}{y}\right)y'+f y+g-\frac{n c^2}{(n-2)^2}\frac{1}{y} \qquad (n\neq 2) \\[2ex] y''=\frac{3y'^2}{4y}+\left(b+\frac{c}{y}\right)y'+e y^2+f y+g-\frac{c^2}{y} \end{cases}$$

$$(4)\qquad y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(a\,y + b + \frac{c}{y}\right)y' - \frac{n\,a^2}{(n+2)^2}y^3 + e\,y^2 + f\,y + g - \frac{n\,c^2}{(n-2)^2}\frac{1}{y}$$

$$(5)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2\,y} + (a\,y + b)\,y' + \frac{a^2}{2}y^3 + e\,y^2 + f\,y$$

$$(6)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2\,y} + (a\,y + b)\,y' + \frac{a^2}{2}y^3 + e\,y^2 + f\,y + g + \frac{h}{y}$$

$$(7)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2\,y} + b\,y' + d\,y^3 + e\,y^2 + f\,y$$

$$(8)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2\,y} + b\,y' + d\,y^3 + e\,y^2 + f\,y + g + \frac{h}{y}$$

$$(9)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2\,y} + b\,y' + e\,y^2 + f\,y + g + \frac{h}{y}$$

$$(10)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2\,y} + (a\,y + b)\,y' - \frac{a^2}{8}y^3 + e\,y^2 + f\,y + g + \frac{h}{y}$$

$$(11)\qquad y'' = \frac{2\,y'^2}{3\,y} + (a\,y + b)\,y' + \frac{3\,a^2}{2}y^3 + e\,y^2 + f\,y$$

$$(12)\qquad y'' = \frac{2\,y'^2}{3\,y} + \left(a\,y + b + \frac{c}{y}\right)y' + \frac{3\,a^2}{2}y^3 + e\,y^2 + f\,y + g - \frac{3\,c^2}{y}$$

$$(13)\qquad y'' = \frac{4\,y'^2}{5\,y} + (a\,y + b)\,y' + 5\,a^2\,y^3 + e\,y^2 + f\,y$$

$$(14)\qquad y'' = \frac{4\,y'^2}{5\,y} + \left(a\,y + b + \frac{c}{y}\right)y' + 5\,a^2\,y^3 + e\,y^2 + f\,y + g - \frac{5\,c^2}{9\,y}.$$

Sous cette forme on a déjà exprimé toutes les conditions provenant des simplifiées; il n'y a plus qu'à écrire celles qui correspondent aux zéros ou aux pôles mobiles. On verra plus loin que certains types dont les simplifiées sont distinctes s'étudient ensemble: telles les équations (5) et (6), ou encore (7) et (8), ou encore (11) et (12), ou enfin (13) et (14).

Je ferai remarquer que l'équation

$$(\mathrm{E})\qquad y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + \left(a\,y + b + \frac{c}{y}\right)y' + d\,y^3 + e\,y^2 + f\,y + g + \frac{h}{y}$$

garde la même forme par la transformation $y = \lambda(x)\,Y$, $X = \varphi(x)$, qui nous sera utile plus d'une fois pour établir entre les coefficients de cette équation une ou deux relations convenablement choisies. Les coefficients de la nouvelle équation $Y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y} + \left(a_1\,Y + b_1 + \frac{c_1}{Y}\right)Y' + \cdots$ se calculent ainsi par les formules F

$$(\mathrm{F})\qquad\left\{\begin{aligned}
&a_1=\frac{a\lambda}{\varphi'^2},\quad d_1=\frac{d\lambda^2}{\varphi'},\quad c_1=\frac{c}{\lambda\varphi'},\quad h_1=\frac{h}{\lambda^2\varphi'^2}\\
&b_1=\frac{b-\dfrac{2}{n}\dfrac{\lambda'}{\lambda}-\dfrac{\varphi''}{\varphi'}}{\varphi'},\quad e_1=\frac{a\lambda'+e\lambda}{\varphi'^2},\quad g_1=\frac{c\dfrac{\lambda'}{\lambda}+g}{\lambda\varphi'^2}\\
&f_1=\frac{f+b\dfrac{\lambda'}{\lambda}-\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\lambda'}{\lambda}\right)^2-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\lambda'}{\lambda}\right)}{\varphi'^2}.
\end{aligned}\right.$$

Dans ce qui suit j'indiquerai pour chaque type les équations qu'il donne au tableau (T), l'intégration de cette équation, quand cette équation est intégrable, ou la réduction de cette équation à une équation du tableau (t). Enfin j'indiquerai, quand ce ne sera pas trop long, les types correspondants du tableau Θ, avec la substitution, qui permet de passer du type du tableau Θ au type correspondant du tableau T. C'est ici que doivent servir les formules (F).

Il sera bien entendu qu'une équation (E) sera réductible à l'un des types T par une substitution $y=\lambda(x)\,Y$, $X=\varphi(x)$ où λ et φ seront données par les opérations indiquées pour chacune: pour l'équation T j'emploierai les lettres X, Y. Pour passer de l'équation (E) au type Θ il suffira d'une substitution $y=\lambda(x)\,\eta$, $\xi=\varphi(x)$ où λ et φ se calculent algébriquement au moyen de $a, b, \ldots, h$. Comme ce calcul est extrêmement simple, je ne l'indiquerai pas et indiquerai tout simplement les opérations à faire pour passer du type Θ au type T correspondant. On remarquera d'ailleurs que si le type Θ ou T est intégrable, ces opérations coïncident toujours avec celles que l'on doit faire pour intégrer le type Θ. Les lettres α, β, γ, δ désigneront des constantes numériques données, les lettres $q, r, s, \ldots$ des fonctions analytiques de la variable indépendante, K une constante arbitraire.

5. *Equations du premier type.*

$$(1)\qquad Y''=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y}\qquad \eta''=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\eta'^2}{\eta}+q(\xi)\,\eta'+n\,r(\xi)\,\eta;$$

intégration: $Y=Z^n$, $Z''=0$; $\eta=\zeta^n$, $\zeta''=q\zeta'+r\zeta$. Connaissant deux intégrales particulières ζ_1 et ζ_2 de $\zeta''=q\zeta'+r\zeta$ on posera $\eta=\zeta^n(\xi)\,Y$, $X=\dfrac{\zeta_2(\xi)}{\zeta_1(\xi)}$ pour passer du type Θ au type T. Si l'on préfère, connaissant deux intégrales de l'équation Θ, η_1 et η_2 on pose $\eta=\eta_1(\xi)\,Y$, $X=\sqrt[n]{\dfrac{\eta_2}{\eta_1}}$. Ici le type (t) est $Y''=0$.

(2) $$Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + 4\,Y^2 \quad \eta'' = \frac{\eta'^2}{2\,\eta} - 3\,q\,\eta' + 4\,\eta^2 - 2\,\eta\,(q' + 2\,q^2);$$

$$Y = Z^2, \quad Z'' = 2\,Z^3 \quad \text{d'où} \quad Z = \frac{p\,(X_1 - 1,\,0) + \frac{1}{2}}{p\,(X_1 - 1,\,0) - \frac{1}{2}};$$

$$\eta = \zeta^2, \quad \zeta = \frac{p\,(u,\, -1,\,0) + \frac{1}{2}}{p\,(u,\, -1,\,0) - \frac{1}{2}} \cdot u', \quad \frac{u''}{u'} = -q\,(\xi).$$

On passe de Θ à T par $\eta = \varphi'^2(\xi)\,Y,\ X = \varphi(\xi),\ \frac{\varphi''}{\varphi'} = -q.$

(3) $$Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + 4\,Y^2 + 2\,Y \qquad \eta'' = \frac{\eta'^2}{2\,\eta} + \frac{q'}{2\,q}\,\eta' + q\,(4\,\eta^2 + 2\,\eta);$$

$Y = Z^2,\ \ Z'' = 2\,Z^3 + Z$, fonctions elliptiques, $d\,X = \frac{d\,Z}{\sqrt{Z^4 + Z^2 + K}};$

$\eta = Y,\ \ d\,X = \sqrt{q\,(\xi)}\,d\,\xi.$

(4) $$Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + 4\,Y^2 + 2\,X\,Y, \quad Y = Z^2, \quad Z'' = 2\,Z^3 + X\,Z \quad \text{(trans. II).}$$

(5) $$Y'' = \frac{3\,Y'^2}{4\,Y} + 3\,Y^2 \quad \eta'' = \frac{3\,\eta'^2}{4\,\eta} + 2\,q\,\eta' + 3\,\eta^2 + (2\,q' - 3\,q^2)\,\eta;$$

$$Y = \frac{\alpha^2}{p^2\,[\alpha\,X + \beta,\,0,\,-1]}; \quad \eta = \frac{u'^2}{p^2\,(u,\,0,\,-1)}, \quad \eta = \varphi'^2(\xi)\,Y, \quad X = \varphi(\xi), \quad \varphi'' = q.$$

(6) $$Y'' = \frac{3\,Y'^2}{4\,Y} + 3\,Y^2 + \alpha\,Y + \beta \quad \eta'' = \frac{3}{4}\frac{\eta'^2}{\eta} + \frac{q'}{2\,q}\,\eta' + q\,(3\,\eta^2 + \alpha\,\eta + \beta);$$

$Y = Z^2,\ \ Z'^2 = Z^4 + \alpha\,Z^2 + 4\,K\,Z - \beta$, fonctions elliptiques;

$\eta = Y,\ \ X = \varphi(\xi),\ \ \varphi'^2(\xi) = q.$

(7) $$Y'' = \frac{3\,Y'^2}{4\,Y} - 1 \quad \eta'' = \frac{3}{4}\frac{\eta'^2}{\eta} + 4\,q\,\eta - 1;$$

$\frac{1}{\eta} = \left(\frac{u'_1}{u_1} - \frac{u'_2}{u_2}\right)^2$, u_1 et u_2 étant deux solutions de $u'' = q\,u$.

On peut remarquer ici qu'en posant $\eta = \zeta^2$ on a $\zeta'' = \frac{\zeta'^2}{2\,\zeta} + 2\,q\,\zeta - \frac{1}{2\,\zeta}$ et qu'en différentiant $2\,\zeta\,\zeta'' = \zeta'^2 + 4\,q\,\zeta^2 - 1$ nous obtenons $\zeta''' = 4\,q\,\zeta' + 2\,q'\,\zeta$, équation linéaire du 3ème ordre. Pour intégrer cette équation du 3ème ordre nous remar-

quons qu'elle admet l'intégrale première $2\zeta\zeta'' = \zeta'^2 + 4q\zeta^2 + K$ où K est une constante arbitraire; pour K nul on a précisément l'équation $\zeta'' = \frac{\zeta'^2}{2\zeta} + 2q\zeta$ rencontrée au début de ce paragraphe de sorte que si u_1 et u_2 sont deux intégrales de $u'' = qu$, $(K_1 u_1 + K_2 u_2)^2$ satisfait à $\zeta''' = 4q\zeta' + 2q'\zeta$ donc u_1^2, u_2^2 et $u_1 u_2$ sont trois intégrales de $\zeta''' = 4q\zeta' + 2q'\zeta$ qui se trouve ainsi intégrée par l'intermédiaire d'une équation différentielle du second ordre. C'est cette remarque qui conduit aussi aisément au résultat simple indiqué pour η.

Substitution de Θ à T:

$$\eta = u_1^4 Y, \quad X = \frac{u_2}{u_1}, \quad u_1 \text{ et } u_2 \text{ intégrales de } u'' = qu.$$

6. *Equations du second type.*

(1) $$Y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y} + Q\,Y\,Y' - \frac{nQ^2}{(n+2)^2}Y^3 + \frac{nQ'}{(n+2)}Y^2;$$

intégration:

$$Y = \frac{(K_1 X + K_2)^n}{u}, \quad u' = \frac{-nQ}{n+2}(K_1 X + K_2)^n;$$

type Θ:

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + q\,y\,y' + r\,y' - \frac{nq^2}{(n+2)^2}y^3 + \frac{n}{n+2}(q' - q\,r)\,y^2 + n\,s\,y;$$

intégration:

$$\frac{y'}{y} = \frac{nq}{n+2}y - nz, \quad z' + z^2 - rz - s = 0$$

d'où

$$y = \frac{v^n}{u}, \quad v'' - rv' - sv = 0, \quad u' = \frac{-nq}{n+2}v^n;$$

substitution de Θ à T:

$$y = v_1^n Y, \quad X = \frac{v_2}{v_1}$$

v_1 et v_2 étant deux intégrales de $v'' - rv' - sv = 0$.

(2) $$Y'' = \frac{3}{4}\frac{Y'^2}{Y} - \frac{3}{2}Y\,Y' - \frac{Y^3}{4} + \frac{q'}{2q}(Y' + Y^2) + r\,Y + q;$$

$$Y = \frac{q}{2u' + u^2 - \frac{q'}{q}u - r}, \quad u = \frac{t'}{t},$$

$$t''' = \frac{3}{2}\frac{q'}{q}t'' + \left(r + \frac{q''}{q} - \frac{q'^2}{q^2}\right)t' + \left(\frac{r'}{2} + \frac{q}{2} - \frac{q'r}{2q}\right)t.$$

Ici le type T et Θ coïncident.

7. *Equations du troisième type.*

Pour n quelconque ces équations rentrent dans le $4^{\text{ème}}$ type. Pour $n = 4$ on a en plus des équations du cas général, où n a été remplacé par 4, l'équation

$$Y'' = \frac{3}{4}\frac{Y'^2}{Y} + 6\,q'\frac{Y'}{Y} + 3\,Y^2 + 12\,q\,Y - 12\,q'' - \frac{36\,q'^2}{Y} \quad \text{avec} \quad q'' = 6\,q^2 + S$$

$$\left(S = 0,\ \frac{-1}{24} \text{ ou } X\right).$$

Intégration:

$$\begin{cases} 3\,Y = 2\,V' + V^2 - 12\,q, \quad V = \dfrac{Z' - q'}{Z - q}, \quad Z'' = 6\,Z^2 + S \\ Y' = -12\,q' - 2\,V\,Y \end{cases}$$

Ici, par exception avec ce qui suivra, j'explicite les équations du type T, et donne les équations correspondantes du type Θ.

$$(1) \quad \begin{cases} Y'' = \dfrac{3}{4}\dfrac{Y'^2}{Y} - \dfrac{12}{X^3}\dfrac{Y'}{Y} + 3\,Y^2 + \dfrac{12\,Y}{X^2} - \dfrac{72}{X^4} - \dfrac{144}{X^6\,Y} \\ \eta'' = \dfrac{3}{4}\dfrac{\eta'^2}{\eta} + 2\left(s + \dfrac{s'}{s}\right)\eta' - 12\,s^3\dfrac{\eta'}{\eta} + 3\,\eta^2 + \\ \qquad + \left(9\,s^2 - 4\,s' - \dfrac{5\,s'^2}{s^2} + \dfrac{2\,s''}{s}\right)\eta - 24\,s^3\left(2\,s - \dfrac{s'}{s}\right) - \dfrac{144\,s^6}{\eta}; \\ \qquad \eta = Y\,\varphi'^2(\xi), \quad X = \varphi(\xi), \quad \dfrac{\varphi'}{\varphi} = s. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} Y'' = \dfrac{3}{4}\dfrac{Y'^2}{Y} + 6\,p'(X, \varepsilon, \alpha)\dfrac{Y'}{Y} + 3\,Y^2 + 12\,p(X, \varepsilon, \alpha)\,Y - 12\,p'' - \dfrac{36\,p'^2}{Y}, \\ \qquad \varepsilon = 0 \text{ ou } \dfrac{1}{12}, \quad \alpha = 1 \text{ si } \varepsilon = 0 \\ \eta'' = \dfrac{3}{4}\dfrac{\eta'^2}{\eta} - \dfrac{\varrho'}{\varrho}\eta' + \dfrac{6}{\varrho}\dfrac{\eta'}{\eta} + 3\,\eta^2 + \left(\dfrac{\varrho'^2}{4\,\varrho^2} - \dfrac{12\,\xi}{\varrho}\right)\eta - \dfrac{36}{\varrho^2}\dfrac{1}{\eta} \quad \varrho = 4\,\xi^3 - \varepsilon\,\xi - \alpha; \\ Y = \eta\,(4\,\xi^3 - \varepsilon\,\xi - \alpha), \quad \xi = p(X, \varepsilon, \alpha). \end{cases}$$

$$(3) \quad Y'' = \frac{3}{4}\frac{Y'^2}{Y} + 6\,Q'\frac{Y'}{Y} + 3\,Y^2 + 12\,Q\,Y - 12\,Q'' - \frac{36\,Q'^2}{Y}, \quad Q'' = 6\,Q^2 + X.$$

Ici le type T et Θ coïncident.

7. *Equations du $4^{\text{ème}}$ type et du $10^{\text{ème}}$ type (et du $3^{\text{ème}}$ type).*

Je consacre un chapitre spécial à ces équations. Je montrerai qu'elles doivent être réductibles à un type T ou Θ:

$$Y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{Y'^2}{Y} + f_n(q, r)\, Y\, Y' + \varphi_n(q, r)\, Y' - \frac{n-2}{n}\frac{Y'}{Y} - \frac{n f_n^2}{(n+2)^2} Y^3$$

$$+ \frac{n[f'_n - f_n \varphi_n]}{n+2} Y^2 + \psi_n(q, r)\, Y - \varphi_n - \frac{1}{n\, Y}.$$

8. *Equations du* 5ème *et du* 6ème *type.*

Il est très simple d'écrire ici l'équation unique qui condense les nombreux types T.

$$Y'' = \frac{Y'^2}{2\, Y} - Y\, Y' + q\, Y' + \frac{Y^3}{2} - 2\, q\, Y^2 + 3\left(q' + \frac{q^2}{2}\right) Y - \frac{72\, r^2}{Y}$$

où $r = \dfrac{V_2 - V_1}{2}$, $q = \dfrac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}$; V_1 et V_2 sont deux intégrales particulières de $V'' = 6\, V^2 + S$, $\left(S = 0, \dfrac{-1}{24}, \text{ ou } X\right)$.

L'intégration se fait en posant

$$Y' + Y^2 - 3\, q\, Y = 12\left[V - \frac{V_1 + V_2}{2}\right]$$

d'où

$$V'' = 6\, V^2 + S, \qquad Y = \frac{6[V - V_1][V - V_2]}{V' - \dfrac{V'_1 + V'_2}{2} - q\left[V - \dfrac{V_1 + V_2}{2}\right]}.$$

L'énumération des types T étant pratiquement impossible, celle des types Θ l'est à fortiori. Si $V_2 \neq V_1$, $r \neq 0$; si $V_2 = V_1$, $r = 0$ et q s'obtient en cherchant la limite du rapport $\dfrac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}$ quand V_2 tend vers V_1.

De même la formule qui donne Y devient illusoire si V est égal à V_1 ou à V_2: on n'a qu'à chercher la limite de ce quotient si V tend vers V_1.

9. *Equations du* 7ème *et du* 8ème *type.*

$$Y'' = \frac{Y'^2}{2\, Y} + \frac{3\, Y^3}{2} \qquad \eta'' = \frac{\eta'^2}{2\, \eta} + 2\, q\, \eta' + \frac{3\, \eta^3}{2} + \left(q' - \frac{3\, q^2}{2}\right)\eta.$$

Intégration:

$$Y = \frac{\alpha}{p(\alpha X + \beta, 0, 1)}, \qquad \eta = \frac{u'}{p(u, 0, 1)}, \qquad \frac{u''}{u'} = q.$$

Substitution:

$$\eta = \varphi'(\xi)\, Y, \qquad X = \varphi(\xi), \qquad \frac{\varphi''}{\varphi'} = q.$$

(2) $$Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + \frac{3Y^3}{2} + 4\alpha Y^2 + 2\beta Y - \frac{\gamma^2}{2Y}$$

$$\eta'' = \frac{\eta'^2}{2\eta} + \frac{q'}{2q}\eta' + q\left[\frac{3\eta^3}{2} + 4\alpha\eta^2 + 2\beta\eta - \frac{\gamma^2}{2\eta}\right].$$

Intégration:

$$Y'^2 = Y^4 + 4\alpha Y^3 + 4\beta Y^2 + 4KY + \gamma^2;$$

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 4\alpha\eta^3 + 4\beta\eta^2 + 4K\eta + \gamma^2}} = \sqrt{q}\,d\xi.$$

Substitution:

$$\eta = Y, \quad X = \varphi(\xi), \quad \varphi'^2(\xi) = q(\xi).$$

(3) $$Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + \frac{3Y^3}{2} + 4XY^2 + 2(X^2 - \alpha)Y - \frac{\beta^2}{2Y}.$$

C'est la $4^{\text{ème}}$ transcendante irréductible; les types T ou Θ coïncident.

10. *Equations du* $9^{\text{ème}}$ *type.*

(1) $$Y'' = \frac{Y'^2 - 1}{2Y} \qquad \eta'' = \frac{\eta'^2 - 1}{2\eta} + 2q\eta.$$

Equations rencontrées incidemment à propos de l'équation (7) du 1^{er} type.

Intégration: $\frac{1}{\eta} = \frac{u'_1}{u_1} - \frac{u'_2}{u_2}$, u_1 et u_2 étant deux intégrales quelconques de $u'' = qu$.

Si u_1 et u_2 sont deux intégrales déterminées $\eta = u_1^2 Y$, $X = \frac{u_2}{u_1}$ fait passer de Θ à T.

(2) $$Y'' = \frac{Y'^2 - 1}{2Y} + 4Y^2 + \alpha Y \qquad \eta'' = \frac{\eta'^2}{2\eta} + \frac{q'}{2q}\eta' + q\left(4\eta^2 + \alpha y - \frac{1}{\eta}\right).$$

Intégration:

$$Y'^2 = 4Y^3 + 2\alpha Y^2 + 4KY + 1;$$

$$\frac{d\eta}{\sqrt{4\eta^3 + 2\alpha\eta^2 + 4K\eta + 1}} = \sqrt{q}\,d\xi.$$

Substitution:

$$\eta = Y, \quad X = \varphi(\xi), \quad \varphi'(\xi) = \sqrt{q}.$$

(3) $$Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + 4\alpha Y^2 - XY - \frac{1}{2Y}, \quad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$Y' = 1 + 2VY, \quad 2\alpha Y = V' + V^2 + \frac{X}{2},$$

$$V'' = 2V^3 + XV - 2\alpha - \frac{1}{2} \quad \text{transcendante irréductible II.}$$

11. *Equations du* $\text{II}^{\text{ème}}$ *type et du* $\text{I2}^{\text{ème}}$ *type.*

Je condense encore en une seule équation les nombreuses équations de ce type; je désigne par $2u^3 + Su + T$ l'une quelconque, mais bien déterminée des 3 expressions $2u^3$, $2u^3 + \alpha u + \beta$, $2u^3 + xq + \alpha$. Dans ces conditions le type T est

$$(1)\quad Y'' = \frac{2}{3}\frac{Y'^2}{Y} - \frac{2}{3}YY' + \frac{2q}{3}Y' + r\frac{Y'}{Y} + \frac{2}{3}Y^3 - \frac{10q}{3}Y^2 + \\ + \left(4q' + r + \frac{8q^2}{3}\right)Y + 2qr - 3r' - \frac{3r^2}{Y}$$

où l'on a

$$q'' = 2q^3 + Sq + T \qquad r = \frac{S}{3} + \frac{2}{3}(q' + q^2).$$

Intégration:

$$\left.\begin{aligned} Y' + Y^2 - 4qY + 3r &= 3[V - q]\,Y \\ Y &= \frac{V' - q' + V^2 - q^2}{V - q} \end{aligned}\right\} \quad V'' = 2V^3 + SV + T.$$

Pour $V = q$, un calcul de limite donnera la valeur de Y et par suite l'intégrale générale de l'équation de Riccati $Y' + Y^2 - 4qY + 3r = 0$. Nous sommes ramenés au type (t) connu $V'' = 2V^3 + SV + T$. Je fais remarquer que le type $V'' = 2V^3 + XV + \alpha$ est la seconde équation irréductible. J'ai annoncé que pour certaines valeurs numériques des paramètres qui y figurent ces équations pouvaient admettre des intégrales particulières qui ne sont plus des transcendantes irréductibles. Ceci se présente ici et l'étude faite dans ce paragraphe d'équations *secondaires* dérivées de l'équation *primaire* $V'' = 2V^3 + XV + \alpha$ met ce fait en évidence. Quelle différence existe-t-il entre le type (11) et le type (12)?: c'est que r est nul pour 11, non nul pour 12. On a à résoudre la question suivante: si q est une intégrale de $q'' = 2q^3 + Xq + \alpha$, la fonction $q' + q^2 + \frac{X}{2}$ est-elle nulle ou pas? Si on écrit $q' + q^2 + \frac{X}{2} = 0$ on en déduit $q'' + 2qq' + \frac{1}{2} = 0$ d'où $q'' - \left(2q^3 + Xq - \frac{1}{2}\right) = 0$ donc pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ l'équation $q'' = 2q^3 + Xq - \frac{1}{2}$ admet une famille d'intégrales ne dépendant que d'une constante, qui ne sont plus que des transcendantes déjà connues, à savoir les intégrales de $q' + q^2 + \frac{X}{2} = 0$.

Il y a ici une autre valeur remarquable pour α, c'est $\alpha = 0$ auquel cas $V = 0$ est une intégrale de $V'' = 2V^3 + XV$. Il y a intérêt à montrer que $\alpha = 0$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$ se ramènent l'un à l'autre. Prenons en effet

$$y'' = 2y^3 + xy, \quad z'' = 2z^3 + xz - \frac{1}{2}.$$

Je pose $y' = uy$ d'où $2y^3 = u' + u^2 - x$, $u'' = 2u^3 - 2xu + 1$. Or en posant $u = -V\sqrt[3]{2}$, $X = -x\sqrt[3]{2}$ on a $V'' = 2V^3 + XV - \frac{1}{2}$. Les 2 types $\alpha = 0$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ se correspondent donc bien. Comment se correspondent les deux groupes d'intégrales pour $y'' = 2y^3 + xy$, $u'' = 2u^3 - 2xu + 1$? A chaque intégrale u correspond pour y l'une ou l'autre des racines carrées de $u' + u^2 - x$, qui se trouve être le carré d'une fonction uniforme de x. Pour toutes les intégrales particulières u telles que $u' + u^2 - x = 0$ on a $y = 0$. — Inversement à chaque intégrale y correspond pour u une seule intégrale $\frac{y'}{y}$; pour l'intégrale $y = 0$ il y a une infinité d'intégrales pour u, à savoir celles de $u' + u^2 - x = 0$. Il est très curieux de voir que l'étude des équations secondaires met en évidence ces valeurs remarquables des paramètres pour les équations irréductibles. Ceci avait déjà eu lieu pour l'équation $V'' = 2V^3 + XV + \alpha$: ($\alpha = 0$ a été signalé par l'équation (3) du premier type $Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + 4Y^2 + 2XY$ qui par $Y = Z^2$ donne $Z'' = 2Z^3 + XZ$; $\alpha = -\frac{1}{2}$ se trouve signalé encore par l'équation (3) du $9^{\text{ème}}$ type: $Y'' = \frac{Y'^2}{2Y} + 4\beta Y^2 - XY - \frac{1}{2Y}$ qui, supposant $\beta \neq 0$ s'intègre par $Y' = -1 + 2VY$, $2\beta Y = V' + V^2 + \frac{X}{2}$ et $V'' = 2V^3 + XV - \frac{1}{2} - 2\beta$; pour $\beta = 0$ on retrouverait l'équation (1) du $9^{\text{ème}}$ type qui s'intègre tout simplement par $V' + V^2 + \frac{X}{2} = 0$).

Nous retrouverons les mêmes particularités pour les types secondaires dérivant de l'équation irréductible IV.

12. *Equations du treizième et quatorzième type.*

Je condense encore les équations du type T en désignant par $6V^2 + S$ les 3 expressions $6V^2$, $6V^2 - \frac{1}{24}$, $6V^2 + X$.

$$(1) \quad Y'' = \frac{4}{5}\frac{Y'^2}{Y} - \frac{2}{3}YY' - \frac{q}{5}Y' + r\frac{Y'}{Y} + \frac{4}{5}Y^3 + \frac{14q}{5}Y^2 + \left(r - 3q' + \frac{6q^2}{5}\right)Y - \frac{1}{3}(qr + 5r') - \frac{5}{9}\frac{r^2}{Y},$$

$$q = \frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}, \quad r = \frac{72}{5}V_1 + \frac{36}{5}V_2 - \frac{9}{5}\left(\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}\right)^2;$$

V_1 et V_2 sont deux intégrales de $V'' = 6V^2 + S$.

Intégration:

$$\begin{cases} Y' + Y^2 + 3\,q\,Y + \dfrac{5\,r}{3} = -\dfrac{5}{2}\,Y\,[Z - q] \\ Y = \dfrac{Z' - q'}{Z - q} - \dfrac{1}{2}\,[Z + q] \\ Z'' = -Z\,Z' + Z^3 - 12\,V_1(X)\,Z + 12\,V'_1\,. \end{cases}$$

L'intégrale de l'équation en Z est $Z = \dfrac{V' - V'_1}{V - V_1}$, $V'' = 6\,V^2 + S$. Ici on a deux calculs de limite à faire, si V_2 tend vers V_1 ou quand Z tend vers q.

CHAPITRE II.

Equations $y'' = y'^2\left(\dfrac{1}{2\,y} + \dfrac{1}{y - 1}\right) + B(y, x)\,y' + C(y, x)$.

1. L'équation doit être de la forme

$$y'' = y'^2\left(\frac{1}{2\,y} + \frac{1}{y - 1}\right) + y'\,\frac{P(y, x)}{y\,(y - 1)} + \frac{Q(y, x)}{y\,(y - 1)},$$

où P et Q sont des polynômes en y. La transformation $y\,Y = 1$ ne change pas la forme de l'équation et montre que P est du $3^{\text{ème}}$ degré au plus en y, Q du $5^{\text{ème}}$. Soit alors

$$P(y, x) = a(x) + y(\cdots), \quad Q(y, x) \equiv b(x) + y(\cdots);$$

en faisant la substitution $x = x_0 + \alpha X$, $y = \alpha Y$ on obtient la simplifiée $Y'' = \dfrac{Y'^2}{2\,Y} + a_0\,\dfrac{Y'}{Y} - \dfrac{b_0}{Y}$ qui est précisément l'une des équations étudiées au chapitre I$^{\text{er}}$. On voit ainsi l'importance que présente la discussion des équations $y'' = \dfrac{y'^2}{y}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + \cdots$. Les résultats obtenus au chapitre 1$^{\text{er}}$, paragraphe 2, nous indiquent que le coefficient de $\dfrac{y'}{y}$ est nul; donc $a(x_0) = 0$, d'où $a(x) \equiv 0$.

Donc $P(y, x)$ n'a pas de terme constant en y, non plus que de terme en y^3 (la transformation $y\,Y = 1$ dont il a été question, ou la simplifiée obtenue par $x = x_0 + \alpha X$, $Y = \alpha y$ le montrent).

Avec un changement de notations j'écris l'équation

$$y'' = y'^2\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) + y'\frac{ay-b}{y-1} + y(y-1)\left[ey + f + \frac{g}{y^2} + \frac{h}{y} + \frac{k}{(y-1)^2} + \frac{l}{y-1}\right].$$

La substitution $yY = 1$ n'opère sur l'équation que l'échange suivant

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & e & f & g & h & k & l \\ b & a & g & h & e & f & k & k-l \end{array}$$

Si $g \equiv 0$ je forme une simplifiée par $x = x_0 + \alpha X$, $y = \alpha^2 Y$, $Y'' = \dfrac{Y'^2}{2Y} - h_0$ et d'après les résultats du paragraphe 3 du Chapitre 1er $h(x) \equiv 0$. De même $e \equiv 0$ entraîne $f \equiv 0$.

Il reste maintenant à former la simplifiée relative à la valeur 1 de y: on l'obtient par $x = x_0 + \alpha X$, $y - 1 = \alpha Y$ d'où $Y'' = \dfrac{Y'^2}{Y} + (a_0 - b_0)\dfrac{Y'}{Y} + \dfrac{k_0}{Y}$, ce qui donne, d'après les résultats relatifs aux équations $y'' = \dfrac{y'^2}{y} + \cdots$, 3 cas possibles: $a - b \equiv k \equiv 0$; $a - b \equiv 0$, $k \not\equiv 0$; $a - b \not\equiv 0$, $k \equiv 0$.

2. L'étude des simplifiées ne donne rien de plus ici. Je n'entre pas dans le détail des résultats fournis par l'étude des valeurs ∞, 0 ou 1 de y. Ces résultats se simplifient d'ailleurs beaucoup en remarquant qu'une substitution $X = \varphi(x)$, $y = Y$ ne change pas la forme de l'équation. On trouve ainsi 4 types canoniques seulement.

$$(1) \qquad Y'' = Y'^2\left(\frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}\right) \qquad \eta'' = \eta'^2\left(\frac{1}{2\eta} + \frac{1}{\eta-1}\right) + q(\xi)\eta'$$

$$(2) \quad \begin{cases} Y'' = Y'^2\left(\dfrac{1}{2Y} + \dfrac{1}{Y-1}\right) + Y(Y-1)\left[\alpha(Y-1) + \beta\dfrac{Y-1}{Y^2} + \dfrac{\gamma}{Y-1} + \dfrac{\delta}{(Y-1)^2}\right] \\ \eta'' = \eta'^2\left(\dfrac{1}{2\eta} + \dfrac{1}{\eta-1}\right) - \dfrac{q'(\xi)}{2q(\xi)}\eta' + \\ \qquad\qquad + q(\xi)\eta(\eta-1)\left[\alpha(\eta-1) + \beta\dfrac{\eta-1}{\eta^2} + \dfrac{\gamma}{\eta-1} + \dfrac{\delta}{(\eta-1)^2}\right] \end{cases}$$

$$(3) \qquad Y'' = Y'^2\left(\frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}\right) - \frac{Y'}{X} + \frac{(Y-1)^2}{X^2}\left(\alpha Y + \frac{\beta}{Y}\right) + \gamma\frac{Y}{X} + \delta\frac{Y(Y+1)}{Y-1}$$

$$(4) \; Y'' = Y'^2\left(\frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}\right) + \frac{2(qY+r)}{Y-1}Y' + \frac{(Y-1)^2}{2}\left(s^2Y - \frac{t^2}{Y}\right) + 2[q^2 - r^2 - (q'+r')]Y$$

avec $2qs - s' = 0$, $2rt + t' = 0$.

3. Pour la $3^{\text{ème}}$ équation, qui est l'une de nos équations irréductibles, le type T suffit. Pour la dernière qui est réductible à une équation de Riccati, je prends la forme T ou Θ identiques. Les deux premières équations s'intègrent par les fonctions exponentielles et elliptiques. Pour la première on passe de Θ à T par $\eta = Y$, $X = \varphi(\xi)$, $\frac{\varphi''}{\varphi'} = q(\xi)$; pour la seconde on passe de Θ à T par $\eta = Y$, $X = \varphi(\xi)$, $\varphi'^2(\xi) = q(\xi)$.

Intégration de (1):

$$Y = Th^2(\alpha X + \beta), \quad \eta = Th^2 u, \quad \frac{u''}{u'} = q(\xi).$$

Intégration de (2):

$$Y'^2 = Y(Y-1)^2\left[2\alpha Y - \frac{2\beta}{Y} - \frac{2\gamma}{Y-1} - \frac{\delta}{(Y-1)^2} + K\right].$$

Intégration de (4): l'équation (4) équivaut à

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{y' + 2(q+r)}{y-1} - sy = -2u \\ &\frac{y-1}{y} = -\frac{u' + 2ru}{u^2 - \frac{t^2}{4}}. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de y donne

$$\frac{d}{dx}(u' + 2ru) = -2(u+2r)(u' + 2ru) + 2(q+r)\left[u' + u^2 + 2ru - \frac{t^2}{4}\right] + s(u' + 2ru).$$

L'équation en u rentre dans les équations $y'' = B(y, x)y' + C(y, x)$. On l'intègre en écrivant

$$u' + u^2 + 2ru - \frac{t^2}{4} = \frac{z}{2} + su, \qquad \frac{z'}{z} = 2(q-r)$$

ce qui donne une quadrature, suivie d'une équation de Riccati pour avoir u et par suite y.

On remarquera que si ni s ni t ne sont nuls, la quadrature est toute faite, car on a alors $\frac{z'}{z} = \frac{s'}{s} + \frac{t'}{t}$ ou $z = Kts$. On peut remarquer aussi que si $u = \pm\frac{t}{2}$ la formule qui donne y est illusoire; il faut alors résoudre l'équation de Riccati

$$y' + 2(q+r) = (sy \mp t)(y-1).$$

CHAPITRE III.

Equations $y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2 + \frac{P(y, x)}{y(y-1)} y' + \frac{Q(y, x)}{y(y-1)}$.

1. — P et Q sont des polynômes en y, dont la substitution $yY = 1$ donne le degré: 3 pour P, 5 pour Q. J'écris donc l'équation

$$y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2 + \left(ay + \frac{b}{y} - \frac{c}{y-1} + d\right) y' +$$
$$+ y(y-1)\left[ey + \frac{f}{y^2} - \frac{g}{(y-1)^2} + h + \frac{k}{y} + \frac{l}{y-1}\right].$$

Les valeurs 0, 1, ∞ de y jouent ici le même rôle. Si je fais par exemple $x = X$, $y = 1 - Y$ à la valeur $y = 1$ correspond $Y = 0$, la forme de l'équation n'est pas modifiée, il y a seulement les échanges suivants:

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h & k & l \\ -a & c & b & a+d & e & g & f & e-h & l & k. \end{matrix}$$

De même par $x = X$, $yY = 1$ à $y = \infty$ correspond $Y = 0$, la forme de l'équation n'est pas modifiée, sauf les échanges

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h & k & l \\ b & a & -c & d+c & f & e & g & k & h & -l-g. \end{matrix}$$

Il suffit donc d'étudier une seule des 3 valeurs 0, 1, ∞. Formons par exemple les simplifiées relatives à $y = 0$. C'est la substitution $x = x_0 + \alpha X$, $y = \alpha Y$ qui donne

$$Y'' = \frac{2}{3}\frac{Y'^2}{Y} + b_0 \frac{Y'}{Y} - \frac{f_0}{Y}.$$

C'est une équation du type $y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + \cdots$ où $n = 3$ et l'on sait d'après les résultats obtenus au chapitre 1[er], paragraphe 2, que ou bien $b_0 = f_0 = 0$, ou $f_0 = 3b_0^2$, c'est-à-dire ou bien $b \equiv f \equiv 0$, ou bien $f(x) \equiv 3b^2(x)$.

Si $b \equiv f \equiv 0$, on forme une seconde simplifiée par $x = x_0 + \alpha X$, $y = \alpha^2 Y$ qui est $Y'' = \frac{2}{3}\frac{Y'^2}{Y} - k_0$ et d'après les résultats du chapitre 1, paragraphe 3, $k_0 = 0$ ou $k \equiv 0$.

On en déduit immédiatement que ou bien $a = e = h = 0$ ou bien $e = 3a^2$ et de même ou bien $c = g = l = 0$ ou bien $g = 3c^2$.

L'interprétation de $b = f = k = 0$ est très simple: si l'on fait $y = z^3$ on a une équation du second ordre et du premier degré en z'' où la valeur $z = 0$ est une valeur ordinaire; donc $b = f = k = 0$ entraîne l'existence d'une famille de zéros triples mobiles.

Les résultats précédents conduisent à une équation obtenue en supposant $a = b = c = 0$, $y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2 + q(x) y'$ qui est à points critiques fixes: en posant $y = Y$, $X = \varphi(x)$, $\frac{\varphi''}{\varphi'} = q$ on obtient $Y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2$ dont l'intégrale générale est $Y = \frac{p'(\alpha X + \beta, 0, -1) + 1}{2}$, de sorte que l'intégrale générale de $y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2 + q(x) y'$ est $y = \frac{p'(u, 0, -1) + 1}{2}$ avec $\frac{u''}{u'} = q$. Il est facile de vérifier que dans le cas actuel y, $1 - y$, $\frac{1}{y}$ sont des cubes de fonctions à points critiques fixes.

2. — Si nous supposons maintenant que a, b, c ne sont pas nuls tous 3, il faudra avoir recours aux développements correspondant soit aux pôles, soit aux zéros, soit aux unités de y. Je fais remarquer que la substitution $y = Y$, $X = \varphi(x)$ ne change pas la forme de l'équation et remplace d par $\left(d - \frac{\varphi''}{\varphi'}\right)\frac{1}{\varphi'}$; a, b, c par $\frac{a}{\varphi'}$, $\frac{b}{\varphi'}$, $\frac{c}{\varphi'}$; e, f, $\ldots l$ par $\frac{e}{\varphi'^2}, \ldots \frac{l}{\varphi'^2}$. Ceci nous servira plus tard.

Puisque d'autre part $yY = 1$, ou $y + Y = 1$ ne change pas non plus la forme de l'équation, il est clair qu'une substitution $X = \varphi(x)$, $y = \varrho_i(Y)$ où ϱ_i est l'une des 6 fractions $\varrho_1 = Y$, $\varrho_2 = \frac{1}{Y}$, $\varrho_3 = 1 - Y$, $\varrho_4 = \frac{Y-1}{Y}$, $\varrho_5 = \frac{1}{1-Y}$, $\varrho_6 = \frac{Y}{Y-1}$ ne change pas non plus la forme de l'équation. Il me suffira donc d'indiquer, pour le tableau T, toutes les formes que l'on peut avoir en supposant $c \neq 0$, car du moment que a, b, c ne sont pas nuls tous 3 et que c peut être par l'une de ces substitutions échangé avec b, ou a, le cas de $c \neq 0$ suffira.

Formons les conditions relatives aux pôles si $a \neq 0$. Il y a alors deux familles de pôles simples: la première $y = \frac{-1}{3a_0}\frac{1}{x - x_0} + \lambda + \cdots$ où λ sera arbitraire, avec la relation $h + 3(ad - a' + a^2) = 0$; la seconde famille de pôles est $y = \frac{2}{3a_0}\frac{1}{x - x_0} + a_1 + \lambda(x - x_0) + \cdots$ où λ est arbitraire avec la relation $(2h + 3a^2)^2 + 6(ah' - 2ha') - 9a^3(b - c) + 6a^2(k + l) = 0$. On remarque en passant que si

$a(x) \equiv e(x) \equiv h(x) \equiv 0$, ces relations sont encore vérifiées, mais entraînent pour les pôles des conséquences différentes (une seule famille de pôles triples). Ces résultats s'étendent aux zéros et aux unités et on est donc conduit à écrire l'équation

$$(1) \quad y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2 + \left(ay + \frac{b}{y} - \frac{c}{y-1} + d\right) y' + \\ + y(y-1)\left[3a^2 y + \frac{3b^2}{y^2} - \frac{3c^2}{(y-1)^2} + h + \frac{k}{y} + \frac{l}{y-1}\right]$$

avec le système de relations différentielles algébriques

$$(2) \quad \begin{cases} h + 3(ad + a^2 - a') = 0 \\ k + 3(bd + bc + b^2 - b') = 0 \\ l + 3(ca + cb + cd + c^2 + c') = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} (2h + 3a^2)^2 + 6(ah' - 2ha') - 9a^3(b-c) + 6a^2(k+l) = 0 \\ (2k + 3b^2)^2 + 6(bh' - 2kb') - 9b^3(a+c) + 6b^2(h - l - 3c^2) = 0 \\ (2l + 3c^2)^2 + 6(cl' - 2lc') - 9c^3(b-a) - 6c^2(h + k + 3a^2 + 3b^2) = 0 \end{cases}$$

que j'ai cité comme type dans l'introduction, paragraphe 7.

Je vais profiter de cet exemple, pour montrer la méthode qui permet d'intégrer les relations (2), (3) et qui démontre qu'alors (1) a ses points critiques fixes, donnant l'intégration de (1) si elle est intégrable ou la ramenant à un type déjà connu. J'ai dit aussi que si l'on prenait maladroitement le système (2), (3) on ne pouvait rien en tirer; or pour les calculs qui suivent je vais montrer que les 3 relations (3) sont inutiles, elles sont d'ailleurs assez difficiles à former, les relations (2) au contraire très simples, parce que le rang du coefficient indéterminé dans le développement polaire est moins élevé pour la 1ère relation (2) que pour la 1ère relation (3). Cette remarque d'ailleurs est générale.

3. Je prends, en supposant $a(x) \neq 0$, le pôle mobile $y = \frac{-1}{3a_0}\frac{1}{x-x_0} + \lambda + \cdots$. l'expression $\frac{y'}{y} - 3ay$ est évidemment régulière pour un tel pôle, et la valeur qu'elle prend pour ce pôle est arbitraire au même titre que λ, à savoir $a'_0 - 6\lambda a_0$. Un pôle de la seconde famille $y = \frac{2}{3a_0}\frac{1}{x-x_0} + \cdots$ est pour cette expression un pôle simple de résidu -3. De même l'expression $\frac{y' + 3b}{y}$, si $b \neq 0$, est régulière pour le zéro mobile $y = -3b_0(x-x_0) + \lambda(x-x_0)^2 + \cdots$, la valeur qu'elle prend

alors étant arbitraire; l'autre zéro mobile $y = \frac{3\,b_0}{2}(x - x_0) + \cdots$ est pour cette expression un pôle mobile de résidu $+3$. Je condense ces résultats en posant

$$u = \frac{y' + 3\,b - 3\,ay^2}{3\,y} + A(x),$$

où $A(x)$ est une fonction arbitraire; le premier pôle et le premier zéro de y laissent u régulière avec une valeur arbitraire; le second pôle ou zéro de y sont pour u un pôle de résidu -1 ou $+1$. Je choisis, pour la commodité des calculs $A \equiv \frac{c}{2} + a - b$. Je vérifie aisément, en me servant des relations (2) que l'équation (1) équivaut au système

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{y' + 3\,b - 3\,ay^2}{3\,y} + \dfrac{c}{2} + a - b \\[2ex] y - 1 = \dfrac{2\,u\left(u - \dfrac{3\,c}{2}\right)}{u' - u^2 - \alpha u + \beta}, \end{cases}$$

où, pour abréger,

$$\alpha \equiv 2\,b + 2\,a - c + d$$

$$\beta \equiv b' - \frac{c'}{2} + 2\,ac - \frac{k}{3} - \frac{l}{3} - d\left(b - \frac{c}{2}\right) - \left(b - \frac{c}{2}\right)^2.$$

Nous éliminons y entre les équations (4): par exemple en remarquant que la 1ère peut s'écrire

$$\frac{y'}{y - 1} = \frac{3\left(u - \dfrac{c}{2}\right)}{y - 1} + 3\left(a + b - \frac{c}{2} + u\right) + 3\,a(y - 1).$$

On obtient ainsi

$$(5)\qquad \frac{u'}{u} + \frac{u' - \dfrac{3\,c'}{2}}{u - \dfrac{3\,c}{2}} = \frac{u'' - 2\,uu' - \alpha' u - \alpha u' + \beta'}{u' - u^2 - \alpha u + \beta} + \frac{3\left(u - \dfrac{c}{2}\right)}{2\,u\left(u - \dfrac{3\,c}{2}\right)}(u' - u^2 - \alpha u + \beta) +$$

$$+ 3\left(a + b - \frac{c}{2} + u\right) + \frac{6\,au\left(u - \dfrac{3\,c}{2}\right)}{u' - u^2 - \alpha u + \beta}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{3\left(u-\frac{c}{2}\right)}{2u\left(u-\frac{3c}{2}\right)}=\frac{1}{2u}+\frac{1}{u-\frac{3c}{2}}$$

on voit immédiatement qu'en multipliant par $u'-u^2-\alpha u+\beta$ les 2 membres de l'équation, on obtient

$$u''=\frac{u'^2}{2u}+P(x,u)u'+Q(x,u);$$

donc P et Q ne peuvent admettre $u-\frac{3c}{2}$ comme pôle: il suffit donc, avant multiplication, d'écrire que dans (5) $u-\frac{3c}{2}$ n'existe pas en dénominateur ou que le polynôme en u suivant, $u'-\frac{3c'}{2}-(u'-u^2-\alpha u+\beta)$, est divisible par $u-\frac{3c}{2}$, ce qui donne la relation $\beta=\frac{3c}{2}\left(\alpha+\frac{3c}{2}\right)-\frac{3c'}{2}\cdot$ On vérifierait aisément que cette relation est une conséquence des relations (3): or mon but est de prouver qu'il est inutile de former ces relations (3), et que le cours des calculs doit les donner, ou plutôt donner 3 équations équivalentes, où les coefficients sont mieux groupés. Cette relation admise nous avons

$$(6)\quad u''=\frac{u'^2}{2u}+(a+b+c+2d)u'+\frac{3u^3}{2}+3(b-a-c)u^2-$$
$$-\left[\frac{3\alpha(c+d)}{2}+\beta-\alpha'-9ac\right]u+\beta(a+b+c+2d)-\beta'-\frac{\beta^2}{2u}\cdot$$

Cette équation (6) résoud la question: nous l'avons étudiée, chapitre 1^er^, paragraphe 9. Nous savons même, qu'il y a avantage pour avoir les types réduits, à supposer $a+b+c+2d=0$; on y arrive par $y=Y$, $X=\varphi(x)$, $u=V\varphi'(x)$, substitution qui laisse intacte les relations (4), où y et u sont remplacées par Y et V, les coefficients de (1) étant remplacés par ceux de l'équation en Y et X. Il suffit alors de déterminer φ par la relation $\frac{\varphi''}{\varphi'}=\frac{a+b+c+2d}{2}$, ce qui revient à ajouter aux 6 relations (2) et (3) la 7^ème^ $a+b+c+2d=0$, difficile à prévoir à priori et qui va permettre de déterminer les 7 fonctions a, b, c, d, h, k, l des types T; il suffit d'ailleurs de déterminer a, b, c, d en tenant compte des 3 relations (2). Il n'y a plus alors qu'à écrire que l'équation (6) *coïncide*, moyennant $a+b+c+2d=0$ avec l'équation

$$(7)\qquad V'' = \frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3 + 4CV^2 + 2DV - \frac{E^2}{2V}$$

où le second membre désigne soit $\frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3$, soit $\frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3 + 4\alpha V^2 + 2\beta V - \frac{\gamma^2}{2V}$ soit $\frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3 + 4XV^2 + 2(X^2-\alpha)V - \frac{\beta^2}{2V}$, α, β, γ étant des constantes numériques. Cela donne des équations différentielles très simples, donnant sans effort a, b, c, d.

4. — Je donne le simple résultat: le tableau T se réduit (moyennant une substitution auxiliaire $Y = \varrho_i(Y_1)$, dont il a été parlé, si c'est nécessaire) aux 2 équations

$$(1)\qquad Y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right)Y'^2 \qquad \eta'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1}\right)\eta'^2 + q(\xi)\eta$$

$$(2)\qquad Y'' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right)Y'^2 + \left(qY + \frac{r}{Y} - \frac{s}{Y-1} - \frac{q+r+s}{2}\right)Y'$$

$$+ Y(Y-1)\left[3q^2Y + \frac{3r^2}{Y^2} - \frac{3s^2}{(Y-1)^2} + 3q' + \frac{3q}{2}(r+s+q) + \right.$$

$$\left. + \frac{3r' - \frac{3r}{2}(r+s-q)}{Y} + \frac{3s' - \frac{3s}{2}(q+r+s)}{Y-1}\right]$$

avec

$$3q = \frac{V'_1}{V_1} - V_1 + \frac{E}{V_1} - 2C, \quad 3r = \frac{V'_1}{V_1} + V_1 + \frac{E}{V_1} + 2C,$$

$$3s = 2V_1, \quad V''_2 = \frac{V'^2_1}{2V_1} + \frac{3V_1^3}{2} + 4CV_1^2 + 2DV_1 - \frac{E^2}{2V_1}\cdot$$

Intégration:

$$V = \frac{Y' + 3r}{3Y} - \frac{3qY^2}{} + \frac{s}{2} + q - r,$$

$$Y - 1 = \frac{2V(V-V_1)}{V' - V'_1 - (V^2 - V_1^2) - \frac{3}{2}(q+r-s)(V-V_1)},$$

$$V'' = \frac{V'^2}{2V} + \frac{3}{2}V^3 + 4CV^2 + 2DV - \frac{E^2}{2V},$$

où C, D, E sont ou bien nulles toutes 3, ou égales à 3 constantes non nulles ensemble, ou bien égales C à X, D à $X^2-\alpha$ et E constante.

5. — Je fais encore remarquer ici que les types dérivés de l'équation irréductible $Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + \frac{3\,Y^3}{2} + 4\,X\,Y^2 + 2\,(X^2 + \alpha)\,Y - \frac{\beta^2}{2\,Y}$ mettent encore en évidence des valeurs particulières de α et β pour lesquelles des intégrales particulières de cette équation sont des transcendantes banales. Il suffit de chercher si q ou r peut être nul, c'est-à-dire si les intégrales de l'une ou l'autre équation de Riccati $Y' + Y^2 + 2\,X\,Y + \beta = 0$ ou $Y' - Y^2 - 2\,X\,Y + \beta = 0$ peuvent satisfaire à l'équation $Y'' = \frac{Y'^2}{2\,Y} + \frac{3\,Y^3}{2} + 4\,X\,Y^2 + 2\,(X^2 - \alpha\,Y - \frac{\beta^2}{2\,Y}$; on trouve que si $\beta = 2\,(1 - \alpha)$ toutes les solutions de la première équation de Riccati sont solutions et si $\beta = 2\,(1 + \alpha)$ toutes les intégrales de la seconde équation de Riccati sont solutions.

CHAPITRE IV.

Equations $y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y - 1}\right)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x)$.

1. On voit aisément que l'équation est de la forme

$$y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y - 1}\right)y'^2 + \left(a + \frac{b}{y} + \frac{c}{y - 1}\right)y' +$$
$$+ y(y - 1)\left[4\,d^2\,(2\,y - 1) + \frac{b^2}{y^2} - \frac{c^2}{(y - 1)^2} + \frac{h}{y} + \frac{k}{y - 1}\right]$$

avec $da - d' = 0$. La transformation $x = X$, $y + Y = 1$ laisse la forme de l'équation invariable sauf échange de b et c, h et k. J'ai à inscrire au tableau T 3 classes d'équations.

2. D'abord deux équations qui s'intègrent par les fonctions elliptiques

$$(1) \qquad Y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y - 1}\right) Y'^2 \qquad \eta'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta - 1}\right)\eta'^2 + q(\xi)\,\eta'.$$

Intégration :

$$Y = \frac{1}{1 - p^2(\alpha X + \beta,\, 0,\, 4)}; \qquad \eta = \frac{1}{1 - p^2(u,\, 0,\, 4)}, \quad \frac{u''}{u'} = q(\xi).$$

$$(2) \qquad Y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right) Y'^2 + Y(Y-1)\left[\frac{\alpha}{Y} + \frac{\beta}{Y-1} + 2\gamma(Y-1)\right].$$

Intégration:

$$Y = \frac{1}{1-u^2}, \quad u'^2 = \left[\alpha u - \frac{\beta}{u} - \frac{\gamma}{u-1} + K\right] u(1-u^2).$$

Le type Θ est

$$\eta'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1}\right)\eta'^2 + \frac{q'(\xi)}{2\,q(\xi)}\eta' + q(\xi)\left[\frac{\alpha}{\eta} + \frac{\beta}{\eta-1} + 2\gamma(2\eta-1)\right].$$

Substitution:

$$\eta = Y, \quad X = \varphi(\xi), \quad \varphi'^2(\xi) = q(\xi).$$

3. Pour la seconde classe d'équations on a

$$da - d' = 0, \quad 2b(a+c) - 2b' + 2b^2 + h = 0, \quad 2c(a+b) - 2c' + 2c^2 + k = 0.$$

Il suffit d'indiquer b, c, d si $d \neq 0$ et b, c, a si $d = 0$. Je n'indique qu'un type T condensant de nombreux types:

$$a = \frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}, \quad b - c = -\frac{3}{2}(V_1 + V_2), \quad b + c = -\frac{3}{2}\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1} \quad d = \frac{V_2 - V_1}{2}$$

V_1 et V_2 étant deux intégrales particulières de $V'' = 2V^3 + SV + T$, où le second membre désigne soit $2V^3$, soit $2V^3 + \alpha V + \beta$, soit $2V^3 + XV + \alpha$.
Intégration:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{Y' + 2b}{Y} + \frac{Y' - 2c}{1-Y} = 2[2V - V_1 - V_2] \\ &2Y - 1 = \frac{2V' - V'_1 - V'_2 - a[2V - V_1 - V_2]}{2(V - V_1)(V - V_2)} \end{aligned}\right\} \quad V'' = 2V^3 + SV + T.$$

4. Pour la dernière catégorie l'une des deux fonctions b ou c est nulle, et l'autre non. A condition de changer s'il le faut Y en $1 - Y$ je suppose $b = 0$, $c \neq 0$. Dans ce cas on a alors $h \neq 0$, $a + c = \frac{h'}{2h}$, $2ac - 2c' + 2c^2 + k = 0$, $da - d' = 0$ l'équation étant

$$y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right)y'^2 - \left(a + \frac{c}{y-1}\right)y' + y(y-1)\left[4d^2(2y-1) - \frac{c^2}{(y-1)^2} + \frac{h}{y} + \frac{k}{y-1}\right].$$

On profite d'une substitution $y = Y$, $X = \varphi(x)$ pour réaliser la condition $2c + 3a = 0$ qui simplifie les résultats et donne les types T. On a 3 équations:

1° V_1 désignant une intégrale de $V'' = 2\,V^3$ on aura

$$h = 2(V'_1 + V'_2), \quad c = 3\,V_1, \quad a = -2\,V_1, \quad d = 0, \quad k = 6(V'_1 - V_1^2).$$

Intégration:

$$Y = \frac{3\,T^2}{2(T' + T^2 - 4\,V_1 T + V'_1 + V_1^2)}, \quad T = \frac{V' - V'_1}{V - V_1} + V + V_1, \quad V'' = 2\,V^3.$$

2°) V_1 désignant une intégrale de $V'' = 2\,V^3 + \alpha V + \beta$ on prend

$$h = 2(V'_1 + V_1^2) + \alpha, \quad d = \frac{\beta}{h}, \quad a = -\frac{h'}{h}, \quad c = \frac{3}{2}\frac{h'}{h}.$$

Intégration:

$$Y = \frac{3\,T^2}{2\,T' + 2\,T^2 - (4\,c + 4\,d + 2\,a)T + h}, \quad T = \frac{V' - V'_1}{V - V_1} + V + V_1,$$

$$V'' = 2\,V^3 + \alpha V + \beta.$$

3°) V_1 désignant une intégrale de $V'' = 2\,V^3 + XV + \alpha$

$$h = 2(V'_1 + V_1^2) + X, \quad d = \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{h}, \quad a = -\frac{h'}{h}, \quad c = \frac{3}{2}\frac{h'}{h};$$

même mode d'intégration que précédemment sauf que V satisfait à $V'' = 2\,V^3 + XV + \alpha$.

CHAPITRE V.

Equations $y'' = \left[\frac{2}{3\,y} + \frac{1}{2(y-1)}\right] y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x)$.

1. On reconnait aisément que l'équation doit être de la forme

$$y'' = \left[\frac{2}{3\,y} + \frac{1}{2(y-1)}\right] y'^2 + \left(ay + b + \frac{c}{y}\right) y' +$$
$$+ y(y-1)\left[\frac{3\,a^2}{8}y + \frac{3}{2}(a' - ab) - \frac{3}{4}a^2 + \frac{3\,c^2}{y^2} + \frac{h}{(y-1)^2} + \frac{6(c' - bc) - 3\,c^2}{2\,y} + \frac{h}{3(y-1)}\right]$$

avec $2\,h(a + b + c) - h' = 0$.

Si l'on fait le changement de fonction

$$3\left(w+\frac{c}{4}-\frac{a}{5}\right)=\frac{y'+3c}{y}-\frac{3ay}{2}$$

on obtient une équation qui résoud la question

$$w''=-ww'+w^3+\left(\frac{2a}{5}+b+\frac{c}{4}\right)(w^2+3w')+A(x)w+B(x).$$

Il y a alors avantage à faire un changement de variables $y=Y$, $X=\varphi(x)$, $w=W\varphi'(x)$ qui conduit à la forme la plus simple pour l'équation en W, à savoir

$$W''=-WW'+W^3+A_1(X)W+B_1(X)$$

étudiée par M. Painlevé. Je pose, comme l'indique la marche des calculs $q-\frac{3c}{4}-\frac{3a}{10}$, $r=-\frac{3a}{5}-\frac{3c}{4}$ et $2h=-9s^2$. Je prends tout de suite le type réduit T où l'on suppose que $\frac{2a}{5}+b+\frac{c}{4}=0$ et l'intégration est

$$Y-1=\frac{3}{2}\,\frac{(W-q)^2-s^2}{[W'-q'+r(W-q)]-[(W-q)^2-s^2]},$$

$$W''=-WW'+W^3-12\,V_1X+12V'_1 \text{ avec } V'_1=6\,V_1^2+S,\quad S=0,\ \frac{-1}{24} \text{ ou } X$$

les quantités q, r, s étant données par les formules

$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{V'_3-V'_1}{V_3-V_1}+\frac{V'_2-V'_1}{V_3-V_1}\right),\quad s=\frac{1}{2}\left(\frac{V'_3-V'_1}{V_3-V_1}-\frac{V'_2-V'_1}{V_2-V_1}\right),$$

$r=-\frac{s'}{s}$, V_2 et V_3 étant 2 autres intégrales de $V''=6\,V^2+S$.

Je rappelle d'ailleurs que l'équation en W s'intègre en écrivant

$$W=\frac{V'-V'_1}{V-V_1},\quad V''=6\,V^2+S.$$

2. Dans ces formules il faut se livrer à un calcul de limites si V_3 tend vers V_2, quand on suppose V_2 différent de V_1 ou quand V_3 et V_2 tendent séparément vers V_1 ou simultanément vers V_1.

Soit $V(X, \alpha, \beta)$ l'intégrale générale de $V''=6\,V^2+S$, où α et β désignent deux constantes arbitraires; si $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$ on a V_1. Alors si V_2 tend vers V_1

on doit remplacer $\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}$ par $\frac{u'}{u}$ où $u = \lambda \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{\partial V_1}{\partial \beta_1}$ et λ et μ deux constantes arbitraires; de même si V_3 tendait vers V_1 on remplacerait $\frac{V'_3 - V'_1}{V_3 - V_1}$ par $\frac{v'}{v}$ où $v = \lambda' \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} + \mu' \frac{\partial V_1}{\partial \beta_1}$ où λ' et μ' sont deux constantes arbitraires.

Ces formules donnent alors complètement la solution si V_2 et V_3 sont différentes de V_1 et différentes entre elles, ou si l'une des quantités V_2 ou V_3 a seule tendu vers V_1 ou si elles sont toutes deux tendu vers V_1 avec $\lambda\mu' - \mu\lambda' \neq 0$.

Si V_2 étant différent de V_1, V_3 tend vers V_2 il faut donner des explications complémentaires pour r; de même si V_2 a tendu vers V_1 ainsi que V_3 et que $\lambda\mu' - \mu\lambda' = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$ puisque λ et μ sont simplement déterminés à un facteur près de proportionalité.

Prenons $V_2 \neq V_1$ et V_3 tendant vers V_2, alors q tend vers $\frac{V'_2 - V'_1}{V_2 - V_1}$ et r vers $-\frac{\varrho'}{\varrho}$ où l'on calcule ϱ par l'intermédiaire de la quantité $u_2 = \lambda \frac{\partial V_2}{\partial \alpha_2} + \mu \frac{\partial V_2}{\partial \beta_2}$ et par la formule $\varrho = \frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{V_2 - V_1}\right)$.

Si V_2 et V_3 ont tendu toutes les deux vers V_1 et si $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$ on a $s = 0$, $q = \frac{u'}{u}$ où $u = \lambda \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{\partial V_1}{\partial \beta_1}$ et $r = -\frac{\varrho'}{\varrho}$ en posant cette fois

$$p = \lambda^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha_1^2} + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} + \mu^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial \beta_1^2},$$

$$\varrho = \lambda' \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{u}\right) + \frac{u'}{u^2}.$$

Cet exemple montre combien doit être minutieuse la formation de tous les types T puisqu'il faut considérer 3 integrales V_1, V_2, V_3 de la même équation $V'' = 6V^2 + S$. Si je prends $S = 0$ j'ai par exemple les intégrales de $V'' = 6V^2$ qui sont ou 0 ou $\frac{1}{(X - X_0)^2}$ ou $\alpha^2 p(\alpha X + \beta, 0, 1)$ ce qui fait en tout pour V_1, V_2, V_3 un nombre considérable de combinaisons.

CHAPITRE VI.

Equations $y'' = \frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-H}\right) + B(y, x)\, y' + C(y, x)$.

1. — Si l'on prend $H = \alpha$ où α est une constante, on obtient seulement deux équations dont les formes T sont

$$(1)\quad Y'' = \frac{Y'^2}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-\alpha}\right)$$

$$(2)\quad Y'' = \frac{Y'^2}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-\alpha}\right) + Y(Y-1)(Y-\alpha)\left[\beta + \frac{\gamma}{Y^2} + \frac{\delta}{(Y-1)^2} + \frac{\varepsilon}{(Y-\alpha)^2}\right]$$

et les formes Θ correspondantes

$$(1')\quad \eta'' = \frac{\eta'^2}{2}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1} + \frac{1}{\eta-\alpha}\right) + q(\xi)\,\eta'$$

$$(2')\quad \eta'' = \frac{\eta'^2}{2}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1} + \frac{1}{\eta-\alpha}\right) + \\ + \frac{q'(\xi)}{2q(\xi)}\eta' + q(\xi)\,\eta(\eta-1)(\eta-\alpha)\left[\beta + \frac{\gamma}{\eta^2} + \frac{\delta}{(\eta-1)^2} + \frac{\varepsilon}{(\eta-\alpha)^2}\right].$$

On passe du type Θ au type T par $\eta = Y$, $X = \varphi(\xi)$ où φ est donné pour (1) par 2 quadratures $\frac{\varphi''}{\varphi'} = q(\xi)$ et pour la seconde par une seule $\varphi'^2 = q(\xi)$.

L'intégrale de (1) s'obtient en écrivant $Y'^2 = K\,Y(Y-1)(Y-\alpha)$ et celle de (2) en écrivant $Y'^2 = \left[2\beta Y - \frac{2\gamma}{Y} - \frac{2\delta}{Y-1} - \frac{2\varepsilon}{Y-\alpha} + K\right] Y(Y-1)(Y-\alpha)$.

2. — En supposant $H = X$ on obtient le type irréductible VI qui est

$$Y'' = \frac{Y'^2}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-X}\right) - Y'\left(\frac{1}{Y-X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X-1}\right) + \\ + \frac{Y(Y-1)(Y-X)}{2X^2(X-1)^2}\left[\alpha - \beta\frac{X}{Y^2} + \gamma\frac{(X-1)}{(Y-1)^2} - \frac{(\delta-1)X(X-1)}{(Y-X)^2}\right].$$

Les substitutions $YY_1 = 1$, $XX_1 = 1$ ou $Y + Y_1 = 1$, $X + X_1 = 1$ ou $Y = XY_1$, $XX_1 = 1$ ne changent pas la forme de l'équation et permutent entre elles les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nuls ensemble, M. Painlevé a donné l'intégration de cette équation; pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quelconques cette équation est irréductible.

CHAPITRE VII.

1. — Je prends ici l'exemple particulier (chapitre I, paragraphe 8)

$$(1) \qquad y'' = \frac{y'^2}{2y} + by' + dy^3 + ey^2 + fy + \frac{h}{y}.$$

Je vais chercher la condition nécessaire pour que l'intégrale générale admette des pôles mobiles et montrer que cette condition est nécessaire pour que l'intégrale générale soit à points critiques fixes. Le mode de calcul s'étendra évidemment à tous les autres cas et légitimera le résultat général énoncé dans le préface, paragraphe 7.

Pour simplifier les calculs faisons, si besoin en est, $b = 0$, $d = \frac{3}{2}$ par une substitution $y = \lambda(x)\, Y$, $X = \varphi(x)$. Soit donc

$$(2) \qquad y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + ey^2 + fy + \frac{h}{y}.$$

Il y a deux familles de pôles simples

$$(3) \qquad y = \frac{\varepsilon}{x - x_0} + B + C(x - x_0) + D(x - x_0)^2 + \cdots$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1, $B = -\frac{e_0}{4}$, $C = \frac{\varepsilon e_0^2}{16} - \frac{e'_0}{3} - \frac{f_0 \varepsilon}{3}$ et D est arbitraire, il disparait en effet de la relation obtenue en égalant les termes constants dans les 2 membres, mais cette relation entraîne pour avoir un tel pôle $\frac{e''_0}{2} + \varepsilon\left(f'_0 - \frac{e_0 e'_0}{4}\right) = 0$, ce qui entraîne puisque x_0 est quelconque et que ε peut être $+1$ ou -1 $e \equiv 0$ $f' \equiv \frac{ee'}{4}$. Ecrivons alors

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{\varepsilon}{x - x_0} + B + C(x - x_0) + \lambda(x - x_0)^2 && 1 \\ y' &= -\frac{\varepsilon}{(x - x_0)^2} + C + 2\lambda(x - x_0) && 2 \end{aligned} \right.$$

où B et C ont les valeurs indiquées. De la première équation on tire aisément les développements en série pour $x - x_0$ et y'

$$
(5) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \varepsilon z \left\{ 1 - \dfrac{e_0}{4} z + \left(\dfrac{e_0^2}{8} - \dfrac{\varepsilon e'_0}{3} - \dfrac{f_0}{3} \right) z^2 + \cdots \right\} \\ y \qquad = \dfrac{-\varepsilon}{z^2} - \dfrac{\varepsilon e_0}{2z} + \left(\dfrac{\varepsilon e_0^2}{8} - e'_0 - f_0 \varepsilon \right) + 4\lambda \varepsilon z + \cdots \end{cases}
$$

J'applique maintenant la formule

$$
\varphi(x_0) = \varphi(x + x_0 - x) = \varphi(x) - \frac{x - x_0}{1} \varphi'(x) + \frac{(x - x_0)^2}{1.\,2} \varphi''(x) \cdots
$$

d'où

$$
e_0 = e - (x - x_0) e' + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} e'' \cdots
$$

$$
\frac{e_0}{z} = \frac{e}{z} - \varepsilon e' + z \left(\frac{e''}{2} + \frac{\varepsilon e e'}{4} \right) + \cdots
$$

$$
\begin{aligned} \frac{\varepsilon e_0^2}{8} - e'_0 - f_0 \varepsilon &= \frac{\varepsilon e^2}{8} - e' - f\varepsilon - (x - x_0) \left[\frac{\varepsilon e e'}{4} - e'' - f' \varepsilon \right] + \cdots \\ &= \frac{\varepsilon e^2}{8} - e' - f\varepsilon - \varepsilon z \left[\frac{\varepsilon e e'}{4} - e'' - f' \varepsilon \right] + \cdots \end{aligned}
$$

J'ai finalement

$$
(6) \qquad \begin{cases} y' = -\dfrac{\varepsilon}{z^2} - \dfrac{\varepsilon e}{2z} + \left(\dfrac{\varepsilon e^2}{8} - \dfrac{e'}{2} - f\varepsilon \right) + \varepsilon z \left[4\lambda - \dfrac{3\varepsilon e e'}{8} + \dfrac{3 e''}{4} + f' \varepsilon \right] + \cdots \\ y = \dfrac{1}{z}. \end{cases}
$$

Le calcul ainsi préparé conduit alors à prendre comme inconnues les fonctions u et z définies par

$$
(7) \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1}{z} \\ y' = \dfrac{-\varepsilon}{z^2} - \dfrac{\varepsilon e^2}{2z} + \left(\dfrac{\varepsilon e^2}{8} - \dfrac{e'}{2} - f\varepsilon \right) + uz. \end{cases}
$$

Ceci conduit au système

$$
(8) \qquad \begin{cases} z' = \varepsilon + z\varphi(u, z) \\ u' = \left[\dfrac{e''}{2} + \varepsilon \left(f' - \dfrac{e e'}{4} \right) \right] \dfrac{1}{z} + \psi(u, z), \end{cases}
$$

où ψ et φ sont deux polynômes en u et z. Faisons maintenant dans le système (8) équivalent à (2) la substitution $x = x_0 + \alpha X$, $z = \alpha Z$, $u = U$; le nouveau

système a ses points critiques fixes comme (8) pour toute valeur non nulle de α, donc encore pour $\alpha = 0$. Or pour $\alpha = 0$ il se réduit à

$$(9) \qquad \begin{cases} Z' = \varepsilon \\ U' = \left\{ \dfrac{e''_0}{2} + \varepsilon \left(f'_0 - \dfrac{e_0 e'_0}{4} \right) \right\} \dfrac{1}{Z} \end{cases}$$

qui s'intègre évidemment par un logarithme si $\dfrac{e''_0}{2} + \varepsilon \left(f'_0 - \dfrac{e_0 e'_0}{4} \right)$ n'est pas nul. On retrouve ainsi les résultats annoncés.

CHAPITRE VIII.

Equations

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{y'^2}{y} + \left(ay + b + \frac{c}{y}\right) y' - \frac{na^2}{(n+2)^2} y^3 + ey^2 + fy + g + \frac{h}{y}$$

avec $a \equiv 0$ ou $a \not\equiv 0$ et $(n-2)^2 h + nc^2 \equiv 0$.

1. — Je suppose d'abord $n = 2$, alors je suppose $ah \not\equiv 0$, pour ne pas étudier de nouveau des équations rencontrées ailleurs. On a alors $c = 0$, $b = \dfrac{h'}{2h}$, $2e + ab - a' = 0$, $g = 0$. On peut par $y = \lambda(x) Y$, $X = \varphi(x)$ supposer $a = -2$, $h = -\dfrac{1}{2}$ d'où

$$(1) \qquad y'' = \frac{y'^2}{2y} - 2yy' - \frac{y^3}{2} + fy - \frac{1}{2y}.$$

Intégration :

$$(2) \qquad y = \frac{z'}{z}, \quad z'''z' = \frac{z''^2}{2} + fz'^2 - \frac{z^2}{2}.$$

Je dérive, d'où

$$(3) \qquad z'''' = 2fz'' + f'z' - z.$$

On est ramené à une équation linéaire du 4^e ordre; si on appelle z_1, z_2, z_3, z_4 4 solutions linéairement indépendantes de (2) on pourra écrire que l'intégrale de (2), puisqu'elle vérifie (3) est de la forme

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4$$

et en substituant dans (2) nous obtenons une relation entre les C de la forme $\Sigma A_{ij} C_{ij} = 0$, où les A_{ij} sont des constantes, i et j étant deux entiers différents égaux à 1, 2, 3 ou 4. On voit donc que y s'exprime rationnellement au moyen de 3 constantes arbitraires.

L'équation (1) pourra si l'on veut être prise comme type T, le type Θ pourra être pris sous la forme

$$\eta'' = \frac{\eta'^2}{2\eta} - 2\eta\eta' + \frac{h'}{2h}\eta' - \frac{\eta^3}{2} + \frac{h'}{2h}\eta^2 + f\eta + \frac{h}{\eta} \tag{4}$$

et on l'intègre de la même façon. —

2. — Supposons $n \neq 2$, $c \neq 0$. Si $a \equiv 0$, on prend $e \equiv 0$ (pour $n = 4$, on peut supposer $e \not\equiv 0$, j'ai étudié autre part ce cas). — Si $a \not\equiv 0$ il y a deux familles de pôles simples mobiles, un $y = -\frac{n+2}{n a_0} \frac{1}{x - x_0} + \cdots$ qui donne la relation $(n+2)e + n(ab - a') = 0$ et un autre

$$y = -\frac{(n+1)(n+2)}{n a_0} \frac{1}{x - x_0} + a_1 + \frac{a_2}{x - x_0} + \cdots + a_p (x - x_0)^{p-1} + \cdots$$

qui ne donne pas de relation: pour le voir supposons $a \equiv -\frac{n+2}{n}$, on voit aisément que l'on a en égalant les termes en $(x - x_0)^{p-3}$, $(p+1)(p+n+1)a_p = \varphi(a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots a_1)$ donc le multiplicateur de a_p n'est jamais nul, car n est un entier positif.

Si l'on veut s'occuper des zéros, on applique ce qui précède en changeant y en $\frac{1}{y_1}$ et appelant $-n = n'$ d'où l'équation

$$y_1'' = \left(1 - \frac{1}{n'}\right)\frac{y_1'^2}{y_1} + c y_1 y'_1 + b y'_1 + a \frac{y'_1}{y_1} - \frac{n' c^2}{(n'+2)^2} y_1^3 - g y_1^2 - f y_1 - e - \frac{n' a}{(n'-2)^2} \frac{1}{y_1}.$$

Mais alors cette fois les deux zéros de y donnent chacun une relation, l'une est $(n-2)g - n(cb - c') = 0$ et l'autre est d'autant plus compliquée à écrire que n est plus grand. Si nous ne tenons pas compte de cette relation j'ai une équation qui est intégrable, et qui sera à points critiques fixes quand cette relation non écrite sera satisfaite. Ecrivons en effet, $\left(\text{nous supposerons } c = -\frac{n-2}{n}\right)$

$$(5)\quad y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + ayy' + by' - \frac{n-2}{n}\frac{y'}{y} - \frac{na^2}{(n+2)^2}y^3 + \frac{n(a'-ab)}{n+2}y^2 + fy - b - \frac{1}{ny}.$$

Je pose

$$(6)\qquad y' - 1 - \frac{any^2}{n+2} = nuy$$

ce qui conduit au système

$$(8)\qquad \begin{cases} u' + u^2 - bu - \dfrac{2a}{n(n+2)} - \dfrac{f}{n} = 0 \\ y' - \dfrac{any^2}{n+2} - nuy - 1 = 0. \end{cases}$$

Si $a \neq 0$, j'ai deux équations de Riccati, si $a \equiv 0$ j'ai une équation de Riccati suivie d'une équation linéaire. Si $a = 0$, je pose $u = \frac{v'}{v}$ et en appelant v_1 et v_2 deux solutions de $v'' = bv' + \frac{fv}{n}$, on a

$$y = (C_1 v_1 + C_2 v_2)^n \left[\frac{1}{C_3^n} + \int \frac{dn}{(C_1 v_1 + C_2 v_2)^n}\right].$$

Il n'y a qu'à exprimer que v étant solution de $v'' = bv' + \frac{fv}{n}$ définie par $v_0 = 0$, v'_0 arbitraire pour $x = x_0$, la quantité $\frac{1}{v^n}$ a pour $x = x_0$ son résidu nul, sinon y a une singularité logarithmique. Si $a \neq 0$ on pose encore $u = \frac{v'}{v}$ et $y = -\frac{n+2}{na}\frac{z'}{z}$ d'où

$$v'' = bv' + \left(\frac{2a}{n(n+2)} + \frac{f}{n}\right)v$$

$$z'' - \left(\frac{a'}{a} + n\frac{v'}{v}\right)z' + \frac{na}{n+2}z = 0.$$

Il n'y a qu'à appliquer les résultats de Fuchs à l'équation en z pour voir qu'à un zéro de v correspond pour z un point logarithmique (les racines de l'équation caractéristique sont en effet 0 et $n+1$), à moins qu'une certaine condition ne soit remplie.

On retrouve ainsi la relation que nous avions formée plus haut par un autre moyen.

Cette méthode a un inconvénient, c'est de ne pas donner les coefficients de l'équation (5) explicitement. J'y arrive par un autre procédé.

3. — J'écris

$$\zeta = \frac{(n-1)\,y' + 1}{ny} - \frac{a(n-1)\,y}{n+2} \tag{9}$$

d'où

$$y\left[\zeta' + \zeta^2 - \frac{a(2n-2-n^2)}{n(n+2)} - \frac{n-1}{n}f - b\zeta\right] + b + \frac{n-2}{n-1}\zeta = 0. \tag{10}$$

On remarque que si $n = 2$ l'opération est terminée, car alors $b = 0$ et je retrouve deux équations de Riccati. Sinon je pose

$$\begin{cases} b + \dfrac{n-2}{n-1}\zeta = \dfrac{n-2}{n-1}z, \quad \alpha = \dfrac{-nb}{n-2} \\ \beta = -\dfrac{n-1}{n-2}b' + \dfrac{(n-1)^2}{(n-2)^2}b^2 - \dfrac{a(2n-2-n^2)}{n(n+2)} - \dfrac{n-1}{n}f. \end{cases} \tag{11}$$

J'ai exprimé y en ζ, donc en z et j'ai

$$z'' = \frac{z'^2}{z}\left[1 - \frac{1}{n-2}\right] - \frac{n}{n-2}zz' - \frac{\alpha n}{n-2}z' + \frac{\beta(n-4)}{n-2}\frac{z'}{z} - \frac{z^3}{n-2} - \frac{\alpha n}{n-2}z^2$$
$$- \left[\alpha' + \alpha^2\frac{n-1}{n-2} + \beta\frac{n^2-2n+2}{(n-1)(n-2)} - \frac{an(n-2)}{(n+2)(n-1)}\right]z - \left[\frac{\alpha\beta n}{n-2} + \beta'\right] - \frac{\beta^2}{(n-2)z}. \tag{12}$$

Si $\beta \equiv 0$, j'ai précisément une équation étudiée (chapitre 1[er], deuxième type), dont l'intégrale est à points critiques fixes et contient rationnellement les constantes d'intégration: on sait que dans ce cas on a une équation linéaire du second ordre à résoudre et $(n-1)$ quadratures à faire ensuite. Si $\beta \equiv 0$, on remarque que les coefficients de (5) sont exprimés explicitement au moyen de deux fonctions arbitraires a, b et de leurs dérivées. On remarque d'ailleurs que pour $n = 3$, β est nécessairement nul.[1]

Si $\beta \not\equiv 0$, on a une équation du même type (où le coefficient de z^3 n'est pas nul) mais où n a été remplacé par $n-2$. Il n'y a plus qu'à recommencer sur elle. Si $n = 4$, cette équation serait justement celle étudiée au premier paragraphe de ce chapitre. Sinon on recommence l'application de la méthode.

Conclusion: si n est impair, ou bien $\beta \equiv 0$ et alors l'application faite une fois de la méthode suffit, ou bien $\beta \equiv 0$, alors on recommencera l'application et on arrivera au bout d'un certain nombre de fois à une équation où cette quantité β sera nulle. Donc pour $n = 2p+1$, j'ai p types distincts suivant qu'il faut appliquer la méthode $1, 2 \ldots, p$ fois.

[1] Pour $n = 3$ j'ai $z'' = -3zz' - z^3 - 3\alpha(z' + z^2) - \left[\alpha' + 2\alpha^2 - \frac{3a}{10}\right]z$; je pose $z = \frac{t'}{t}$ d'où $t'' + 3\alpha t' + \left[\alpha' + 2\alpha^2 - \frac{3a}{10}\right]t' = 0$, c'est bien une équation linéaire du second ordre suivie d'une quadrature.

Si n est pair, ou bien β est nul pour l'équation et alors l'application de la méthode faite une fois ramène à un type connu (chapitre 1[er], deuxième type), ou bien il sera nul pour l'une des équations suivantes, ce qui ramène toujours à ce type, ou bien on arrivera à une équation du type étudié au 1[er] paragraphe de ce chapitre: donc pour $n = 2p$, il y a p types distincts.

Il n'y a plus qu'à montrer que les coefficients de (5) peuvent être écrits explicitement, quel que soit n au moyen de deux fonctions arbitraires et de leurs dérivées d'ordre $n - 2$ au plus.

Si $\beta \equiv 0$, c'est déjà démontré. Si $\beta \neq 0$, supposons que pour les valeurs numériques $2, 3, \ldots n - 2$ on sache obtenir ce résultat pour les équations étudiées: dans (12) le terme en $\frac{z'}{z}$ me donnera a ou b; le terme en z' me donne β, celui en z me donne a, donc en rapprochant ces 2 résultats, j'ai f; j'ai donc obtenu a, b, f; c'est un résultat vrai pour $n = 2$, $n = 3$ donc il s'étend à toutes les valeurs positives de n.

REMARQUES DIVERSES SUR L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

PAR

H. POINCARÉ.

À PARIS.

§ 1. Formules fondamentales.

Nous écrirons l'équation de FREDHOLM sous la forme suivante:

$$\varphi(x) = \lambda \int f(x, y) \varphi(y) dy + \psi(x); \tag{1}$$

$\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $\psi(x)$ une fonction donnée, $f(x, y)$ le noyau. La solution du problème nous est donnée par la formule de FREDHOLM:

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int \psi(y) \frac{N(\lambda; x, y)}{D(\lambda)} dy \tag{2}$$

où $D(\lambda)$ est le $D_{-\lambda f}$ de FREDHOLM, tandis que $N(\lambda; x, y)$ s'écrit d'après les notations de FREDHOLM:

$$\frac{1}{\lambda} D_{-\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nous aurons donc:

$$D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots x_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1 - \lambda \int f(x_1, x_1) dx_1 + \cdots$$

Je n'écris qu'un signe $\int$ pour une intégration multiple.

Nous aurons de même:

$$N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = f(x, y) - \lambda \int f\begin{pmatrix} x, x_1 \\ y, x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \cdots$$

Nous sommes ainsi conduits à examiner la formation du déterminant:

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}.$$

Un des termes de son développement sera de la forme:

$$\pm \Pi f(x_i, x_k)$$

$\Pi f(x_i, x_k)$ représentant le produit d'un certain nombre de facteurs de la forme $f(x_i, x_k)$. Ces facteurs doivent satisfaire à la condition suivante: chacune des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devra figurer une fois et une seule *comme* x_i, c'est à dire comme premier argument de la fonction $f(x, y)$ dans l'un des facteurs du produit. Elle devra figurer une fois et une seule *comme* x_k, c'est à dire comme second argument de la fonction $f(x, y)$ dans l'un des facteurs du produit. A chacun des termes du déterminant correspondra ainsi une permutation des lettres x_1, $x_2, \ldots, x_n$; à savoir celle qui change chacune des lettres x_i en la lettre x_k correspondante. Il y aura autant de termes dans le déterminant qu'il y a de semblables permutations, c'est à dire $n!$; et le produit Π devra être affecté du signe $+$ si la permutation appartient au groupe alterné et du signe — dans le cas contraire.

On peut répartir les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en un certain nombre de *cycles* de telle façon que la permutation S envisagée permute circulairement entre elles les lettres d'un même cycle. Si nous désignons par $T(S)$ celui des termes $\pm \Pi f(x_i, x_k)$ de notre déterminant qui correspond à la permutation S, et si nous posons, pour abréger,

$$f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu) = f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \ldots f(x_\lambda, x_\mu) f(x_\mu, x_\alpha)$$

nous pourrons écrire:

$$T(S) = \pm \Pi f(x_i, x_k) = \pm \Pi f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu).$$

Le dernier membre représente un produit de facteurs de la forme $f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu)$. Chacun de ces facteurs correspond à un des *cycles* de la permutation S et les lettres

$$x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu$$

sont les lettres de ce cycle, qui sont permutées circulairement par S.

Quant au signe, on l'obtient en faisant le produit de différents facteurs ± 1 correspondant aux différents facteurs $f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\mu)$, ces facteurs étant

égaux à $+1$ pour les cycles d'un nombre impair de lettres et à -1 pour les cycles d'un nombre pair de lettres.

Nous poserons:

$$
(3) \qquad
\begin{gathered}
a_n = \int f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \quad a(S) = \int T(S) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\
b_k = \int f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu) dx_\alpha dx_\beta \ldots dx_\lambda dx_\mu.
\end{gathered}
$$

Dans cette dernière égalité, l'indice k de b_k représente le nombre des lettres du cycle $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu$; l'intégrale ne dépend évidemment que de ce nombre, puisque quelles que soient les lettres $x_\alpha, \ldots, x_\mu$ envisagées, on les fera toujours varier entre les mêmes limites.

Cela posé l'intégrale $a(S)$ va se décomposer en un produit d'intégrales b_K, puisque chacun des facteurs de $T(S)$ ne contient qu'un certain nombre de lettres $x_\alpha, \ldots, x_\mu$ qui ne figurent pas dans les autres facteurs; nous pourrons écrire:

$$a(S) = \pm \Pi b_k$$

ou pour préciser le signe:

$$(4) \qquad a(S) = \Pi[(-1)^{k+1} b_k].$$

Si par exemple $n = 17$ et que S comprenne 1 cycle de 4 lettres, 2 de 3 lettres, 3 de 2 lettres et 2 d' 1 lettre, nous aurons:

$$a(S) = (-b_4)(b_3)^2(-b_2)^3(b_1)^2 = b_4 b_3^2 b_2^3 b_1^2.$$

Il faut maintenant calculer

$$a_n = \sum a(S)$$

la sommation étant étendue aux différentes permutations S de n lettres. Nous devons donc rechercher combien il y a de permutations comprenant a cycles de α lettres, b cycles de β lettres, c cycles de γ lettres, d cycles de δ lettres. En d'autres termes de combien de manières peut-on répartir n lettres en a groupes de α lettres, b de β, c de γ et d de δ lettres? On rangera les lettres dans les différents ordres possibles qui sont au nombre de $n!$; on prendra ensuite les α premières lettres qui nous donneront le 1er groupe, puis les α suivantes qui nous donneront le 2d, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait les a groupes de α lettres; on prendra ensuite les β lettres suivantes pour former le 1er groupe de β lettres et ainsi de suite. On obtiendrait ainsi $n!$ solutions, mais elles ne sont pas distinctes; on obtient la même répartition en permutant *circulairement* les lettres d'un

même groupe, ce qui nous oblige à diviser par $\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d$; on obtient la même répartition en permutant d'une manière quelconque les divers groupes qui sont formés d'un même nombre de lettres ce qui nous oblige à diviser par $a!\,b!\,c!\,d!$; le nombre cherché est donc

$$\frac{n!}{\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\,.\,a!\,b!\,c!\,d!}.$$

On aura donc:

$$a_n = \sum \frac{n!}{\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\, a!\,b!\,c!\,d!}[(-1)^{\alpha+1}b_\alpha]^a[(-1)^{\beta+1}b_\beta]^b[(-1)^{\gamma+1}b_\gamma]^c[(-1)^{\delta+1}b_\delta]^d.$$

Les entiers α, β, γ, δ, a, b, c, d, (dont le nombre peut d'ailleurs être quelconque et n'a été pris égal à 4 que pour fixer les idées) sont assujettis à la condition:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = n.$$

On a donc

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{(-1)^n}{a!\,b!\,c!\,d!}\left(\frac{-b_\alpha}{\alpha}\right)^a\left(\frac{-b_\beta}{\beta}\right)^b\left(\frac{-b_\gamma}{\gamma}\right)^c\left(\frac{-b_\delta}{\delta}\right)^d.$$

Il vient ensuite:

$$(5)\qquad D(\lambda) = \sum\frac{(-\lambda)^n a_n}{n!} = \sum\frac{1}{a!\,b!\,c!\,d!}\left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a\left(\frac{-\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b\left(\frac{-\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c\left(\frac{-\lambda^\delta b_\delta}{\delta}\right)^d$$

de sorte que $D(\lambda)$ se présente sous la forme d'un produit:

$$D(\lambda) = \Pi\varphi_\alpha; \quad \varphi_\alpha = \sum\left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a\frac{1}{a!}.$$

Mais la sommation est immédiate et l'on trouve:

$$\varphi_\alpha = e^{-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}}; \quad \log\varphi_\alpha = -\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}$$

d'où

$$(6)\qquad \log D(\lambda) = -\sum\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}$$

et en prenant la dérivée logarithmique de $D(\lambda)$:

$$(7)\qquad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum\lambda^{\alpha-1}b_\alpha.$$

Ces formules ne sont pas nouvelles, elles ont été énoncées par Fredholm qui les a découvertes par une voie différente (Acta Mathematica, tome 27, page 384).

Appliquons la même analyse au calcul de $N(\lambda)$ et du déterminant

$$f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}.$$

Chaque terme se présentera encore sous la forme:

$$\pm \Pi f(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu)$$

sauf que l'un des facteurs sera remplacé par

(8) $$f(x, y; x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda) = f(x, x_\alpha) f(x_\alpha, x_\beta) \ldots f(x_\lambda, y).$$

Si nous posons

$$\int f(x, y; x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda) dx_\alpha dx_\beta \ldots dx_\lambda = f_{k+1}(x, y)$$

cette intégrale ne dépendra que du nombre k des variables $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$ par rapport auxquelles on intègre; c'est ce nombre qui figure dans l'indice $k + 1$. Cette fonction $f_{k+1}(x, y)$ n'est autre chose que ce qu'on appelle le *noyau réitéré* d'ordre $k + 1$. On aura d'ailleurs:

$$b_k = \int f_k(x, x) dx.$$

Si alors par analogie avec les notations adoptées plus haut nous désignons par $T'(S)$ un quelconque des termes de notre nouveau déterminant et par $a'(S)$ l'intégrale de $T'(S)$, nous trouverons comme plus haut:

$$a'(S) = \pm f_{h+1}(x, y) \Pi b_k$$

avec la condition:

$$h + \Sigma k = n.$$

Le facteur $f_{h+1}(x, y)$ provient de l'intégration du facteur (8) et les divers facteurs b_k de l'intégration des autres facteurs de la forme $f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)$. Je puis encore écrire:

$$a'(S) = (-1)^h f_{h+1} a(S')$$

où S' est la substitution que permute entre elles les lettres qui figurent dans les facteurs autres que le facteur (8) et de la façon indiquée par l'ordre de ces lettres dans ces divers facteurs. Si alors nous désignons par a'_n l'intégrale de notre déterminant lui-même, il viendra en remarquant qu'on obtient autant de fois le même terme qu'il y a de manières de choisir les h lettres $x_\alpha, x_\beta \ldots, x_\lambda$ qui fi-

gurent dans le facteur (8); c'est à dire autant de fois qu'il y a d'arrangements de n lettres h à h; c'est à dire $\frac{n!}{n-h!}$

$$a'_n = \sum (-1)^h f_{h+1} a_{n-h} \frac{n!}{n-h!}$$

ou

$$N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} a'_n = \sum \lambda^h f_{h+1} (-\lambda)^{n-h} \frac{a_{n-h}}{n-h!} = D(\lambda) \sum \lambda^h f_{h+1}$$

d'où enfin

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum \lambda^h f_{h+1}. \tag{9}$$

Cette formule s'obtiendrait immédiatement en cherchant à développer suivant les puissances de λ la solution de l'équation (1).

Bien que les séries (6), (7) et (9) ne convergent que pour les petites valeurs de λ, leur considération peut abréger le calcul des termes des séries $D(\lambda)$ et $N(\lambda)$, qui, elles, convergent toujours. Mais ce n'est pas là l'usage que je veux en faire.

§ 2. Cas où le noyau devient infini.

La fonction

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

se présente sous la forme d'une fonction méromorphe de λ; mais elle peut être mise d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux fonctions entières. En effet on pourrait écrire:

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{N(\lambda)G(\lambda)}{D(\lambda)G(\lambda)}$$

$G(\lambda)$ étant une fonction entière quelconque de λ; et si l'on veut que la fraction du second membre soit irréductible, il suffit de prendre

$$G(\lambda) = e^{H(\lambda)}$$

$H(\lambda)$ étant une fonction entière. En particulier nous pouvons prendre:

$$H(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}.$$

Alors le dénominateur $D(\lambda)G(\lambda)$ reste une fonction entière, et le développement de son logarithme est le même que celui de $\log D(\lambda)$ en supprimant les n premiers termes.

Ces considérations prennent surtout de l'intérêt dans les cas où la méthode de Fredholm ne s'applique pas immédiatement, et où il faut recourir à la généralisation exposée par Fredholm pages 384 sqq., par le moyen des noyaux réitérés.

La méthode de Fredholm s'applique immédiatement quand le noyau f reste partout fini; supposons maintenant que les premiers noyaux réitérés

$$f,\ f_2,\ldots,f_{n-1}$$

deviennent infinis, mais que f_n et les noyaux suivants $f_{n+1},\ldots$ restent partout finis. Nous supposerons de plus que les intégrales

$$\int f_i(x,y)\psi(y)dy \qquad (i=1,2,\ldots \text{ ad inf.})$$

restent finies. Toutes ces conditions sont remplies dans l'hypothèse faite par Fredholm dans son § 6, c'est à dire si le noyau $f(x,y)$ ne devient infini que pour $x=y$ et comme $(x-y)^\alpha$ où $\alpha<\frac{n-1}{n}\cdot$

L'équation (1) du § 1 peut alors être remplacée par la suivante:

$$\varphi(x)=\lambda^n\int f_n(x,y)\varphi(y)dy+\Theta(x) \tag{1 bis}$$

où

$$\Theta(x)=\psi(x)+\int\psi(y)[\lambda f+\lambda^2 f_2+\cdots+\lambda^{n-1}f_{n-1}]dy$$

est une fonction connue. La méthode de Fredholm est alors immédiatement applicable à l'équation (1 bis), et on peut la résoudre par une formule analogue à la formule (2) du § 1, où l'on remplace seulement λ par λ^n, f par f_n, et ψ par Θ. Si nous convenons d'écrire $N(\lambda,f)$ et $D(\lambda,f)$ au lieu de $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ pour mettre en évidence la fonction f, la nouvelle formule pourra s'écrire:

$$\varphi(x)=\Theta(x)+\lambda^n\int\Theta(y)\frac{N(\lambda^n,f_n)}{D(\lambda^n,f_n)}dy \tag{2 bis}$$

ou bien encore

$$\varphi(x)=\psi(x)+\lambda\int\psi(y)\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n,f_n)}dy. \tag{2 ter}$$

Pour définir $N_1(\lambda)$, nous poserons

$$f + \lambda f_2 + \cdots + \lambda^{n-2} f_{n-1} = F(x, y)$$

et nous aurons alors

$$N_1(\lambda) = F(x, y) D(\lambda^n, f_n) + \lambda^n N(\lambda^n, f_n) + \lambda^{n+1} \int N(\lambda^n, f_n; x, z) F(z, y) dz.$$

La fonction

$$\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)}$$

se présente sous la forme d'une fonction méromorphe; et nous sommes certains que le numérateur et le dénominateur sont des séries entières toujours convergentes. Mais il n'est pas certain que cette fraction soit irréductible; il est même aisé de se rendre compte qu'elle ne l'est pas en général. En effet la formule subsiste quand le noyau f est toujours fini; mais dans ce cas la formule (2) est vraie également de sorte qu'on a:

$$\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)} = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda, f)};$$

le dénominateur de la 1ère fraction admet tous les zéros

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots.$$

du dénominateur de la 2de; mais il admet en outre tous les zéros

$$\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots.$$

où α est une racine n^e de l'unité. Cela montre que la 1ère fraction n'est pas irréductible.

Le problème que je me propose maintenant, c'est dans le cas où les premiers noyaux réitérés ne sont pas partout finis, *de trouver une formule analogue à la formule* (2 ter) *mais où figure une fraction irréductible.*

Et je me propose d'établir que le résultat est le suivant. Il suffira de remplacer dans la formule (2) $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ par

$$N(\lambda) e^{-H(\lambda)}, \quad D(\lambda) e^{-H(\lambda)}$$

où $H(\lambda)$ est l'ensemble des $n - 1$ premiers termes de $\log D(\lambda)$. Reprenons le développement de ce logarithme

$$\log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^a b_a}{a};$$

$b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ peuvent être infinis, mais $b_n, b_{n+1}, \ldots$ sont finis. Formons alors la série

$$K(\lambda) = -\frac{\lambda^n b_n}{n} - \frac{\lambda^{n+1} b_{n+1}}{n+1} - \frac{\lambda^{n+2} b_{n+2}}{n+2} - \cdots$$

Nous montrerons que la série $K(\lambda)$ est convergente pour les petites valeurs de λ; que $e^{K(\lambda)}$ est une fonction entière; que

$$e^{K(\lambda)} \sum \lambda^h f_{h+1}$$

est également une fonction entière; sauf pour $x = y$ auquel cas quelques-uns de ses coefficients deviennent infinis.

Revenons un instant au cas où f reste fini; et reprenons la formule (9) du § 1

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^h f_{h+1}.$$

Si nous revenons au cas où f_n est le premier noyau réitéré qui reste fini, et si nous changeons λ en λ^n et f en f_n, cette formule deviendra:

$$\frac{N(\lambda^n, f_n)}{D(\lambda^n, f_n)} = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda^{nh} f_{nh+n} \tag{3}$$

ou en mettant en évidence les variables x et y

$$\frac{N(\lambda^n, f_n; x, y)}{D(\lambda^n, f_n)} = \sum \lambda^{nh} f_{nh+n}(x, y)$$

d'où en supprimant pour abréger les indications λ^n et f_n devenues inutiles:

$$\int \frac{N(x, x)}{D} dx = \sum \lambda^{nh} b_{nh+n} \tag{4}$$

et

$$\int \frac{N(x, y)}{D} f_k(y, x) dx dy = \sum \lambda^{nh} \int f_{nh+n}(x, y) f_k(y, x) dx dy = \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+k}. \tag{5}$$

Reprenons notre fonction $K(\lambda)$, nous aurons:

$$-\frac{dK}{d\lambda} = \lambda^{n-1} b_n + \lambda^n b_{n+1} + \lambda^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

le second membre peut s'écrire:

$$\lambda^{n-1} \sum \lambda^{nh} b_{nh+n} + \lambda^n \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+1} + \cdots + \lambda^{n+k-1} \sum \lambda^{nh} b_{nh+n+k} + \cdots + \lambda^{2n-2} \sum \lambda^{nh} b_{nh+2n}$$

ou bien:

$$\lambda^{n-1}\int\frac{N(x, x)}{D}dx+\sum_{k=1}^{k=n-1}\lambda^{n+k-1}\int\frac{N(x, y)}{D}f_k(y, x)dxdy. \tag{6}$$

Comme $D=D(\lambda^n, f_n)$ et $N(x, y)=N(\lambda^n, f_n; x, y)$ sont des fonctions entières de λ on voit que l'expression (6) et par consequent $\frac{dK}{d\lambda}$ est une fonction méromorphe de λ et que les infinis de cette fonction méromorphe ne sont autre chose que les zéros de $D(\lambda^n, f_n)$.

Or d'après Fredholm, si l'on a:

$$D(\lambda_K^n, f_n)=0$$

et si λ_K^n est un zéro simple, ce que je supposerai, il existera une fonction $\varphi_K(x)$ et une seule telle que:

$$\varphi_K(x)=\lambda_K^n\int\varphi_K(y)f_n(x, y)dy. \tag{7}$$

En convenant de poser:

$$\int\varphi(y)f_p(x, y)dy=S^p\varphi(x)$$

d'où

$$S^p[S^q\varphi(x)]=S^{p+q}\varphi(x)$$

cette relation peut s'écrire

$$\varphi_K(x)=\lambda_K^nS^n\varphi_K(x) \tag{7 bis}$$

on en déduit:

$$S\varphi_K(x)=\lambda_K^nS^{n+1}\varphi_K(x)=\lambda_K^nS^n[S\varphi_K(x)]$$

de sorte que $S\varphi_K(x)$ sera aussi une solution de l'équation (7) ou (7 bis); comme cette équation ne comporte qu'une solution, on devra avoir:

$$S\varphi_K(x)=\alpha\varphi_K(x)$$

α étant un coefficient constant.

On en tire

$$S^n\varphi_K(x)=\alpha^n\varphi_K(x)$$

d'où en comparant avec (7 bis)

$$\alpha^n=\frac{1}{\lambda_K^n}$$

ce qui revient à dire que α est égal à $\frac{1}{\lambda_K}$ à une racine n^e près de l'unité. Nous

pourrons toujours choisir λ_K de telle façon que cette racine n^e soit égale à 1 et que l'on ait:

$$\varphi_K(x) = \lambda_K S \varphi_K(x). \tag{8}$$

On obtiendrait un résultat analogue dans le cas d'une racine multiple; je ne reproduis pas ici l'analyse complète qui a déjà été faite bien des fois. Cela posé reprenons notre fonction méromorphe $\frac{dK}{d\lambda}$ et proposons-nous de déterminer le résidu de cette fonction méromorphe pour le pôle $\lambda = \lambda_K$ et pour les pôles correspondants $\lambda = \alpha\lambda_K$, α étant une racine n^e de l'unité.

Cherchons d'abord ce résidu pour

$$\int \frac{N(x, x)}{D} dx = \Sigma \lambda^{nh} b_{nh+n}.$$

Cette expression n'est autre chose que

$$-\frac{d \log D(\lambda^n, f_n)}{d\lambda^n}.$$

Son résidu est donc -1, si l'on considère λ^n comme la variable indépendante, c'est-à-dire que le terme infini sera de la forme

$$-\frac{1}{\lambda^n - \lambda_K^n}$$

et le résidu correspondant, si l'on reprend λ comme variable est

$$-\frac{1}{n\lambda^{n-1}}$$

c'est-à-dire: $-\frac{1}{n}\lambda_K^{1-n}$ pour le pôle λ_K et $-\frac{1}{n}(\alpha\lambda_K)^{1-n}$ pour le pôle $\alpha\lambda_K$. Pour le premier terme de l'expression (6), le résidu est donc $\frac{1}{n}$ tant pour le pôle λ_K que pour le pôle $\alpha\lambda_K$. Considérons maintenant le terme général de l'expression (6), c'est-à-dire:

$$\lambda^{n+p-1} \int \frac{N(x, y)}{D} f_p(y, x)\, dx\, dy.$$

Le résidu de $\frac{N(x, y)}{D}$ pour $\lambda^n = \lambda_K^n$ en considérant de nouveau λ^n comme la variable indépendante sera une fonction de x et d'y de la forme $\varphi_K(x)\psi_K(y)$, en vertu d'un théorème connu d'après ce qui précède: le résidu par rapport à λ^n de

$$\int \frac{N(x, x)}{D} dx$$

devra être

$$-1 = \int \varphi_K(x)\,\psi_K(x)\,dx$$

et celui de

$$\int \frac{N(x, y)}{D} f_p(y, x)\,dx\,dy$$

sera

$$\int \varphi_K(x)\,\psi_K(y)\,f_p(y, x)\,dx\,dy.$$

Mais on a d'après l'équation (8)

$$\int \varphi_K(x)\,f(y, x)\,dx = S\varphi_K(y) = \frac{1}{\lambda_K}\varphi_K(y)$$

et plus généralement:

$$\int \varphi_K(x)\,f_p(y, x)\,dx = S^p\varphi_K(y) = \frac{1}{\lambda_K^p}\varphi_K(y).$$

Le résidu cherché sera donc

$$\frac{1}{\lambda_K^p}\int \varphi_K(y)\,\psi_K(y)\,dy = -\frac{1}{\lambda_K^p}$$

et par rapport à λ:

$$-\frac{1}{n\,\lambda_K^p\,\lambda^{n-1}} = -\frac{1}{n}\lambda_K^{1-n-p}\alpha^{1-n}$$

pour le pôle $\lambda = \alpha\lambda_K$; pour le terme correspondant de l'expression (6), qui est affecté du facteur λ^{n+p-1}; il faudra multiplier par

$$\lambda^{n+p-1} = (\alpha\lambda_K)^{n+p-1}$$

de sorte qu'on trouvera:

$$-\frac{1}{n}\alpha^p.$$

Nous avions trouvé pour le premier terme de l'expression (6)

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\alpha^0$$

de sorte que le résidu total de l'expression (6) est

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1}\alpha^p.$$

Cela fait -1 pour le pôle $\lambda=\lambda_K$, c'est-à-dire pour $\alpha=1$, et 0 pour le pôle $\lambda=\alpha\lambda_K$ quand α est une racine n^e de l'unité différente de 1.

Ainsi, l'expression

$$\frac{dK}{d\lambda}=-\lambda^{n-1}b_n-\lambda^n b_{n+1}-\cdots$$

est une fonction méromorphe de λ dont tous les résidus sont égaux à 0 où à 1. Donc l'expression

$$e^{K(\lambda)}$$

sera une fonction entière de λ.

C. Q. F. D.

Il resterait à établir que

$$\sum\lambda^h f_{h+1}\,e^{K(\lambda)} \tag{9}$$

est également une fonction entière de λ.

En effet nous avons d'après la formule (2 ter)

$$\sum\lambda^h f_{h+1}=\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)}$$

ce qui nous prouve que l'expression (9) est une fonction méromorphe de λ, qui ne pourrait devenir infinie que pour $D(\lambda^n, f_n)=0$, c'est-à-dire pour $\lambda=\lambda_K$ et pour $\lambda=\alpha\lambda_K$. Comme $e^{K(\lambda)}$ s'annule pour $\lambda=\lambda_K$, nous voyons que l'expression (9) c'est-à-dire

$$\frac{N_1(\lambda)}{D}e^{K(\lambda)}$$

où j'ai écrit D au lieu de $D(\lambda^n, f_n)$ reste finie pour $\lambda=\lambda_K$; il me reste à montrer que $N_1(\lambda)$ s'annule pour $\lambda=\alpha\lambda_K$; ou que le résidu correspondant de $\frac{N_1}{D}$ est nul. Nous avons donc à évaluer le résidu de

$$\frac{N_1}{D}=F+\lambda^n\frac{N(x, y)}{D}+\lambda^{n+1}\int\frac{N(x, z)}{D}F(z, y)\,dz. \tag{10}$$

Le 1^{er} terme du 2^d membre de (10) ne devient pas infini; le second a pour résidu:

$$[\lambda_K^n\varphi_K(x)\psi_K(y)]\frac{1}{n\lambda_K^{n-1}}$$

et le troisième

$$\frac{1}{n\lambda_K^{n-1}}\alpha\lambda_K^{n+1}\int\varphi_K(x)\psi_K(z)F(z,y)\,dz=\frac{1}{n\lambda_K^{n-1}}\sum\alpha^p\lambda_K^{n+p}\int\varphi_K(x)\psi_K(z)f_p(z,y)\,dz.$$

Nous sommes donc amenés à calculer

$$\int\psi_K(z)f_p(z,y)\,dz.$$

Nous démontrerons bientôt que l'on a:

$$(11)\qquad \int\psi_K(z)f_p(z,y)\,dz=\lambda_K^{-p}\psi_K(y)$$

de sorte qu'il viendra pour notre résidu:

$$\frac{1}{n\lambda_K^{n-1}}\sum_{p=1}^{n-1}\alpha^p\lambda_K^n\varphi_K(x)\psi_K(y)$$

et pour le résidu total de l'expression (10)

$$\frac{1}{n\lambda_K^{n-1}}\lambda_K^n\varphi_K(x)\psi_K(y)\sum_{p=0}^{n-1}\alpha^p=0.$$

Donc l'expression (9) ne devenant infinie ni pour $\lambda=\lambda_K$ ni pour $\lambda=\alpha\lambda_K$ est une fonction entière

C. Q. F. D.

Il nous reste à démontrer l'égalité (11). A cet effet, remarquons que $N(y,x)$ et $f_p(y,x)$ sont à $f(y,x)$, ce que $N(x,y)$ et $f_p(x,y)$ sont à $f(x,y)$. Le résidu de $\frac{1}{D}N(x,y)$ étant $\varphi_K(x)\psi_K(y)$ et par conséquent celui de $\frac{1}{D}N(y,x)$ étant $\varphi_K(y)\psi_K(x)$, nous voyons que $\psi_K(x)$ est à $f(y,x)$ ce que $\varphi_K(x)$ est à $f(x,y)$. Alors de même que l'on a

$$(12)\qquad \varphi_K(x)=\lambda_K^n\int\varphi_K(y)f_n(x,y)\,dy$$

et que $\varphi_K(x)$ est la seule solution de cette équation; de même on aura:

$$(12\text{ bis})\qquad \psi_K(x)=\lambda_K^n\int\psi_K(y)f_n(y,x)\,dy$$

et $\psi_K(x)$ sera la seule solution de cette équation. De l'équation (12) nous avons déduit

$$\varphi_K(x) = \beta \lambda_K \int \varphi_K(y) f(x, y)\, dy \tag{13}$$

β étant une racine n^e de l'unité, de même de (12 bis) nous déduirons

$$\psi_K(x) = \beta' \lambda_K \int \psi_K(y) f(y, x)\, dy \tag{13 bis}$$

β' étant une racine n^e de l'unité; et il reste à faire voir que $\beta = \beta' = 1$. Pour cela remarquons que f_{n+1} étant toujours fini comme f_n, nous pouvons raisonner sur l'un de ces noyaux comme sur l'autre. Il existera donc des fonctions $\varphi'_K(x)$ et $\psi'_K(x)$ satisfaisant aux équations:

$$\varphi'_K(x) = \gamma \lambda_K \int \varphi'_K(y) f(x, y)\, dy \tag{14}$$

$$\psi'_K(x) = \gamma' \lambda_K \int \psi'_K(y) f(y, x)\, dy \tag{14 bis}$$

γ et γ' étant deux racines $n + 1^{es}$ de l'unité. Il est aisé de voir que φ'_K est égal à φ_K, et ψ'_K à ψ_K; sans quoi on aurait:

$$\varphi'_K(x) = \gamma^n \lambda_K^n \int \varphi'_K(y) f_n(x, y)\, dy$$

$$\psi'_K(x) = \gamma'^n \lambda_K^n \int \psi'_K(y) f_n(y, x)\, dy$$

et nous devrions conclure que $D(\lambda^n, f_n)$ admet outre la racine λ_K^n les racines $\gamma^n \lambda_K^n$ et $\gamma'^n \lambda_K^n$, c'est-à-dire plusieurs racines (deux au moins, ou une racine double) de même module que λ_K^n. Cela n'arrivera pas en général (et il est aisé de voir comment on devrait raisonner dans les cas d'exception).

Il faut donc que

$$\varphi'_K = \varphi_K, \quad \psi'_K = \psi_K, \quad \gamma = \beta, \quad \gamma' = \beta'$$

d'où enfin

$$\gamma^n = \beta^n = 1, \quad \gamma'^n = \beta'^n = 1; \quad \gamma^n = \gamma^{n+1} = 1, \quad \gamma'^n = \gamma'^{n+1} = 1$$

$$\gamma = \gamma' = 1.$$

L'équation (13 bis) s'écrit alors

$$\psi_K(x) = \lambda_K \int \psi_K(y) f(y, x)\, dy$$

et il est aisé d'en déduire

$$\psi_K(x) = \lambda_K^p \int \psi_K(y) f_p(y, x)\, dy$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (11) qu'il fallait démontrer.

§ 3. Formation de la fonction méromorphe.

On peut tirer de là une façon de calculer les divers termes du développement du numérateur et du dénominateur de notre fonction méromorphe. Nous avons trouvé plus haut:

$$(1) \qquad \log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^a b_a}{a}$$

formule que nous avons déduite de la suivante:

$$(2) \qquad D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n a_n}{n!} = \sum \frac{1}{a!\, b!\, c!\, d!} \left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a \left(\frac{-\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b \left(\frac{-\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c \left(\frac{-\lambda^\delta b_\delta}{\delta}\right)^d.$$

Comment pourrons-nous passer de ces développements à ceux de notre nouveau dénominateur $e^{K(\lambda)}$ et de son logarithme $K(\lambda)$. Pour passer du développement (1) à celui de $K(\lambda)$, il suffit de supprimer les $n-1$ premiers termes, c'est-à-dire de remplacer $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ par 0; on obtiendra de même le développement de e^K en partant du développement (2) et en y remplaçant $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ par 0. Soit donc:

$$(2 \text{ bis}) \qquad e^{K(\lambda)} = \sum \frac{(-\lambda)^n a'_n}{n!}.$$

Nous avons trouvé plus haut

$$a_n = \Sigma\, a(S) = \Sigma \pm b_\alpha^a b_\beta^b b_\gamma^c b_\delta^d.$$

Pour obtenir a'_n, il suffira dans le 3e membre de cette double égalité de remplacer $b_1, \ldots, b_{n-1}$ par zéro. Mais $a(S)$ provient de l'intégration d'un des termes $T(S)$ du déterminant

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots x_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{pmatrix}$$

et b_a de celle de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_a)$. D'où la règle suivante:

Quand le noyau deviendra infini pour $x = y$ de la même façon que $(x-y)^a$ où $a < \frac{n-1}{n}$, on pourra former le dénominateur de notre fonction méromorphe en appliquant la règle générale de Fredholm; et par conséquent en partant des déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

seulement il faudra supprimer tous ceux des termes de ces déterminants qui contiennent un facteur de la forme:

$$f(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots, x_\lambda, x_\mu) = f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \ldots f(x_\lambda, x_\mu) f(x_\mu, x_\alpha)$$

les lettres $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots, x_\lambda, x_\mu$ formant un cycle de moins de n lettres.

La même règle s'applique à la formation du numérateur.

Dans le cas de $n = 2$, il suffira donc de supprimer les facteurs de la forme $f(x_i, x_i)$, c'est-à-dire de remplacer dans nos déterminants tous les termes de la diagonale principale par zéro. Cette règle, dans ce cas particulier, avait déjà été trouvée par une autre voie par Hilbert dans le dernier paragraphe de son premier mémoire (Göttinger Nachrichten, 1904).

§ 4. La question du genre.

Fredholm a démontré que les coëfficients de la fonction entière $D(\lambda)$ décroissent comme $(n^n)^{-\frac{1}{2}}$; et que la décroissance est plus rapide encore quand le noyau $f(x, y)$ satisfait à certaines conditions de continuité. Si par exemple on a:

$$(1)\qquad \begin{aligned} |f(x, y) - f(x, y')| &< A\,|y - y'|^\alpha \\ |f(x, y) - f(x', y)| &< A\,|x - x'|^\alpha \end{aligned}$$

A et α étant des constantes, les coëfficients a_n décroîtront comme $(n^n)^{-\alpha-\frac{1}{2}}$.

D'un autre côté Hadamard a démontré que si le n^e coëfficient d'une fonction entière est de l'ordre de $(n^n)^{-\frac{1}{\lambda}}$, le genre de cette fonction entière sera E, en désignant par $E + 1$ l'entier immédiatement supérieur à λ. Si λ est entier, il peut y avoir doute et le genre peut être égal à λ où à $\lambda - 1$.

Donc le genre de la fonction $D(\lambda)$ dépendra de l'exposant α qui figure dans les inégalités (1); il sera zéro pour $\alpha > \frac{1}{2}$, il sera au plus égal à 1 pour $\alpha > 0$, $\alpha \leq \frac{1}{2}$; et enfin au plus égal à 2 pour $\alpha = 0$. Si donc le noyau a des dérivées premières finies de sorte que $\alpha = 1$, le genre de $D(\lambda)$ sera certainement nul.

Nous pouvons nous demander ce que devient l'exposant α quand on passe du noyau $f(x, y)$ aux noyaux réitérés successifs. Supposons que $f(x, y)$ soit de la forme:

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{|x - y|^{\alpha}} \qquad \left(\alpha < \frac{1}{2}\right)$$

$\psi(x, y)$ étant holomorphe. On peut alors établir l'inégalité:

$$|f_2(x', y) - f_2(x, y)| < A\,|x - x'|^{1-2\alpha}$$

A étant une constante. La fonction

$$D(\lambda^2, f_2)$$

sera donc une fonction entière de genre 0 par rapport à λ^2 pourvu que l'exposant $1 - 2\alpha$ soit plus grand que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire pourvu que

$$\alpha < \frac{1}{4}.$$

Si alors le noyau $f(x, y)$ n'est pas partout fini, la fonction $D(\lambda, f)$ n'existe pas en général, mais nous pouvons comme dans le § 2, former les deux fonctions entières

$$e^{K(\lambda)}, \quad \Sigma \lambda^h f_{h+1} e^{K(\lambda)};$$

on a d'ailleurs

$$D(\lambda^2, f_2) = e^{K(\lambda)} e^{K(-\lambda)}.$$

La fonction $e^{K(\lambda)}$ sera en général dans ce cas de genre 1, de sorte que $e^{K(\lambda)}$ sera le produit d'un certain nombre de facteurs primaires de la forme:

$$e^{\beta\lambda}(1 - \gamma\lambda).$$

Le facteur primaire correspondant de $e^{K(-\lambda)}$ sera alors:

$$e^{-\beta\lambda}(1 + \gamma\lambda)$$

et celui de $D(\lambda^2, f_2)$ sera

$$1 - \gamma^2\lambda^2$$

ce qui explique que la fonction $D(\lambda^2, f_2)$ soit de genre zéro.

Les résultats des trois premiers §§ s'appliquent sans changement lorsque les intégrales et les fonctions connues ou inconnues qui figurent dans l'équations de Fredholm sont des intégrales doubles ou triples, et des fonctions de deux et de trois variables, au lieu d'être des intégrales simples, et des fonctions d'une seule variable. Mais il n'en est pas de même des résultats relatifs au genre que nous venons d'exposer. Le genre ne s'abaisse plus quand les inégalités (1) sont satisfaites, ou plutôt il s'abaisse moins rapidement. Un résultat

subsiste toutefois, et c'est le seul qui nous importe, *le genre de* $D(\lambda)$ *reste toujours au plus égal à* 2.

Comme d'ailleurs nous avons:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum \lambda^{n-1} b_n$$

et que l'on peut écrire en décomposant $D(\lambda)$ en facteurs primaires

$$D(\lambda) = \Pi \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{P_i}$$

λ_i étant les «*valeurs propres*» de l'équation de Fredholm, c'est-à-dire les racines de $D(\lambda) = 0$ et P_i étant un polynôme du 2^d degré au plus; on en déduit:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum \frac{1}{\lambda - \lambda_i} + \sum P'_i = - \sum \sum \frac{\lambda^n}{\lambda_i^{n+1}} + \sum P'_i$$

d'où en identifiant les deux développements de $\frac{D'}{D}$ et remarquant que $\sum P'_i$ ne peut donner que des termes de degré 0 et 1.

(2) $$b_n = \sum \lambda_i^{-n}$$

égalité qui est exacte pour $n > 2$.

§ 4. Tentative de généralisation.

Au § 2, nous avons donné une règle pour former notre fonction méromorphe de λ quand le noyau $f(x, y)$ peut devenir infini, tandis que l'un des noyaux réitérés successifs $f_n(x, y)$ reste partout fini.

On est naturellement amené à penser que la même règle restera applicable dans des cas beaucoup plus généraux à savoir:

1°. Si les intégrales

$$\int f_h(x, y) \psi(y) dy$$

sont finies, sauf pour des valeurs exceptionnelles de x.

2°. Si en même temps à partir d'un certain rang, les nombres que nous avons appelés b_n sont finis.

Il est clair que cela peut arriver dans des cas où tous les noyaux $f_n(x, y)$ présentent encore des infinis, et l'on peut se demander si les règles des §§ 2 et 3 peuvent néanmoins être appliquées.

Je me bornerai au cas où toutes les *valeurs propres* λ_i sont réelles et positives. Les théorèmes de Hilbert nous permettent de reconnaître dans quel cas cela a certainement lieu. Ainsi si le noyau est *symétrique*, les λ_i sont certainement réels; ils seront positifs quand la forme quadratique qui correspond à ce noyau sera définie; et par exemple, si $f(x, y)$ est un noyau symétrique, les valeurs propres rélatives au noyau redoublé $f_2(x, y)$ seront réelles positives.

Cela posé, nous supposons que notre noyau $f(x, y)$ symétrique, devient infini pour certaines valeurs de x et de y; par exemple en certains points singuliers ou sur certaines lignes singulières du plan des xy. Nous emploierons le même artifice que M. Hilbert à la fin de son premier mémoire. Nous subdiviserons la partie du plan des xy à laquelle s'étend l'intégration (c'est-à-dire par exemple le carré $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, si les limites d'intégration de l'intégrale de Fredholm sont 0 et 1). Ce carré sera ainsi divisé en deux aires A et A' que nous assujettirons aux conditions suivantes: 1° Tous les points et lignes singulières devront se trouver dans A'. 2° Chacune des deux aires A et A' devrait être symétrique par rapport à la droite $x = y$. Nous définirons ensuite un noyau symétrique $f'(x, y)$ de la façon suivante:

$$f'(x, y) = f(x, y) \quad (\text{dans } A) \qquad f'(x, y) = 0 \quad (\text{dans } A').$$

Nous désignerons par λ_i et b_n les valeurs de ces quantités qui correspondent à $f(x, y)$ et par λ'_i et b'_n les valeurs des quantités correspondantes pour $f'(x, y)$.

Nous ferons ensuite tendre l'aire A' vers zéro, de telle sorte que λ'_i tende vers λ_i et b'_n vers b_n. Le noyau $f'(x, y)$ étant symétrique, les λ'_i seront tous réels, et nous pouvons nous arranger de façon qu'ils soient tous positifs. Comme le noyau $f'(x, y)$ est partout fini, les résultats du § 4 seront applicables et nous aurons:

$$b'_n = \sum \lambda'^{-n}_i. \tag{1}$$

Nous supposerons les λ'_i rangés par ordre de grandeur croissante. Nous aurons ensuite

$$b_n = \lim b'_n.$$

Je dis d'abord que $\sqrt[n]{b_n}$ tend vers une limite pour $n = \infty$. En effet, les λ'_i étant réels positifs, les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$ sont positives; de plus on a:

$$b'_{n+1} < b'_n \lambda'^{-1}_1, \quad b'_n > \lambda'^{-n}_1$$

d'où

$$b'^{\frac{1}{n+1}}_{n+1} < b'^{\frac{1}{n+1}}_{n} \lambda'^{\frac{-1}{n+1}}_{1}, \quad \lambda'^{-1}_{1} < b'^{\frac{1}{n}}_{n}$$

et enfin

$$\lambda'^{\frac{-1}{n+1}}_{1} < b'^{\frac{1}{n(n+1)}}_{n}, \quad b'^{\frac{1}{n+1}}_{n+1} < b'^{\frac{1}{n}}_{n}.$$

Les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$ vont donc en décroissant quand n croît; il en résulte qu'à la limite les quantités $\sqrt[n]{b_n}$ iront en décroissant quand n croît (ou du moins ne pourront croître) et comme ces quantités sont positives, elles tendront vers une limite pour $n = \infty$; cette limite, je l'appelle λ_1^{-1}.

Je dis maintenant que l'on a:

$$\lambda_1 = \lim \lambda'_1.$$

Observons d'abord que, *au moins si n est pair*, b'_n va en croissant quand n étant constant, l'aire A' diminue, on a en effet:

$$b'_{2n} = \int f'_n(x, y) f'_n(y, x)\, dx\, dy.$$

Mais le noyau étant symétrique, cela peut s'écrire

$$b'_{2n} = \int f'^2_n(x, y)\, dx\, dy$$

et d'après sa définition $f'^2_n(x, y)$ ne peut que croître quand l'aire A' diminue; on aura donc si n est pair:

$$b'_n < b_n.$$

De plus pour $n > p$, d'après notre hypothèse, les quantités b_n sont finies; nous aurons donc si p est un nombre pair suffisamment grand:

$$b'_p = \Sigma \lambda'^{-p}_i < b_p.$$

Les quantités

$$\frac{b'_{n+1}}{b'_n}$$

vont en croissant quand n croît; il en est donc de même des limites vers lesquelles tendent ces quantités quand l'aire A' tend vers zéro, c'est-à-dire de

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Les quantités $\frac{b'_{n+1}}{b'_n}$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tendent pour $n=\infty$, vers les mêmes limites que les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$, $\sqrt[n]{b_n}$ c'est-à-dire vers λ'^{-1}_1 et λ_1^{-1}; mais elles tendent vers ces limites en croissant, tandis que $\sqrt[n]{b_n}$, $\sqrt[n]{b'_n}$ tendent vers ces limites en décroissant. On aura donc:

$$\sqrt[n]{b'_n} > \lambda'^{-1}_1 > \frac{b'_{n+1}}{b'_n}, \quad \sqrt[n]{b_n} > \lambda_1^{-1} > \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

d'où:

$$\frac{b'_{n+p}}{b'_n} < \lambda'^{-p}_1, \quad \frac{b_{n+p}}{b_n} < \lambda_1^{-p}.$$

On tire de là:

$$\lambda'^{-n}_1 < b'_n < b'_p \lambda'^{p-n}_1 < b_p \lambda'^{p-n}_1$$

$$\lambda_1^{-n} < b_n < b_p \lambda_1^{p-n}$$

$$(2) \qquad \frac{\lambda'_1}{\lambda_1}\left(\frac{b'_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{n-p}} < b_p^{\frac{1}{n-p}} \lambda_1^{\frac{-p}{n-p}}; \qquad \frac{\lambda'_1}{\lambda_1}\left(\frac{b'_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{n}} > b_p^{-\frac{1}{n}} \lambda_1^{-\frac{p}{n}}.$$

Nous ne savons pas encore si λ'_1 tend vers une limite quand l'aire A' tend vers zéro; mais nous pouvons parler de la limite supérieure et de la limite inférieure de λ'_1; je veux dire que λ'_1 oscillera entre deux limites, dont l'une tendra vers lim sup λ'_1 et l'autre vers lim inf. λ'_1 quand A' tendra vers zéro; à la limite les inégalités (2) deviendront donc (puisque lim $b'_n = b_n$):

$$(3) \qquad \frac{\text{lim. sup. } \lambda'_1}{\lambda_1} \leqq b_p^{\frac{1}{n-p}} \lambda_1^{\frac{-p}{n-p}}; \qquad \frac{\text{lim. inf. } \lambda'_1}{\lambda_1} > b_p^{-\frac{1}{n}} \lambda_1^{-\frac{p}{n}}.$$

Mais comme nous pouvons prendre n assez grand pour que les seconds membres de l'inégalité (3) soient aussi voisins de 1 que nous voudrons, nous pouvons écrire:

$$\frac{\text{lim sup } \lambda'_1}{\lambda_1} \leqq 1; \quad \frac{\text{lim inf } \lambda'_1}{\lambda_1} \geqq 1$$

c'est-à-dire

$$\text{lim } \lambda'_1 = \lambda_1.$$

C. Q. F. D.

On verrait comme plus haut que les quantités

$$(b'_n - \lambda'^{-n}_1)^{\frac{1}{n}} = (\lambda'^{-n}_2 + \lambda'^{-n}_3 + \cdots)^{\frac{1}{n}}$$

vont en décroissant quand n croît indéfiniment, et que l'aire A' demeure constante. D'autre part on a

$$\lim (b'_n - \lambda'^{-n}_1) = b_n - \lambda_1^{-n}$$

quand n restant constant, A' tend vers zéro. On voit qu'à la limite

$$(b_n - \lambda_1^{-n})^{\frac{1}{n}}$$

décroît quand n croît. Cette expression pour $n = \infty$, tend donc vers une limite que j'appelle λ_2^{-1}.

On verrait ensuite que les expressions

$$\frac{b'_{n+1} - \lambda'^{-n-1}_1}{b'_n - \lambda'^{-n}_1}$$

et par conséquent

$$\frac{b_{n+1} - \lambda_1^{-n-1}}{b_n - \lambda_1^{-n}}$$

vont en croissant avec n et on en déduirait les inégalités

$$\lambda'^{-n}_2 < b'_n - \lambda'^{-n}_1 < (b'_p - \lambda'^{-p}_1)\, \lambda'^{p-n}_2 < b'_p\, \lambda'^{p-n}_2$$

$$\lambda_2^{-n} < b_n - \lambda_1^{-n} < (b_p - \lambda_1^{-p})\, \lambda_2^{p-n} < b_p\, \lambda_2^{p-n}$$

et en raisonnant ensuite sur $b_n - \lambda_1^{-n}$, $b'_n - \lambda'^{-n}_1$, λ'_2 et λ_2 comme nous l'avons fait sur b_n, b'_n, λ'_1 et λ_1, nous verrions que

$$\lim \lambda'_2 = \lambda_2 .$$

Et ainsi de suite.

Je dis maintenant que si nous considérons la fonction:

$$K(\lambda) = -\frac{\lambda^p b_p}{p} - \frac{\lambda^{p+1} b_{p+1}}{p+\text{I}} - \cdots$$

c'est le logarithme d'une fonction entière de λ. Soit en effet

$$K_1(\lambda) = K(\lambda) - \sum_{i=1}^{i=h} \log\left(\text{I} - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = -\sum \frac{c_q \lambda^q}{q} .$$

Nous aurons pour $q > p$

$$c_q = b_q - \lambda_1^{-q} - \lambda_2^{-q} - \cdots - \lambda_h^{-q}$$

et par conséquent

$$\lim \sqrt[q]{c_q} = \lambda_{h+1}^{-1} .$$

La fonction $K_1(\lambda)$ est donc holomorphe pour $|\lambda| < |\lambda_{h+1}^{-1}|$ et il en est de même de e^{K_1} ou de

$$e^{K_1}\prod_{i=1}^{i=h}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)=e^{K(\lambda)}.$$

Mais nous pouvons prendre h assez grand pour que λ_{h+1} soit aussi grand que l'on veut. On a en effet

$$b_p > \lambda_1^{-p} + \lambda_2^{-p} + \cdots + \lambda_h^{-p} > h\,\lambda_{h+1}^{-p}$$

d'où

$$\lambda_{h+1} > \left(\frac{b_p}{h}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Donc e^K reste holomorphe pour un module de λ aussi grand que l'on veut. C'est donc une fonction entière.

C. Q. F. D.

Il faudrait pour compléter le résultat, démontrer le même théorème en ce qui concerne le numérateur de la fonction méromorphe; je me propose de revenir ultérieurement sur cette question.

§ 5. Équations intégrales de la 1ère sorte.

Il y a des cas où la méthode de Fredholm permet presque immédiatement l'intégration des équations intégrales de la 1ère sorte, c'est-à-dire de la forme:

$$\int f(x, y)\,\varphi(y)\,dy = \psi(x)$$

où $\psi(x)$ est donnée et $\varphi(y)$ inconnue. Soit par exemple:

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,[e^{ixy} + \lambda f(x, y)]\,dy = \psi(x).$$

Dans le cas de $\lambda = 0$, elle se réduit tout simplement à l'équation de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,e^{ixy}\,dy = \psi(x)$$

d'où l'on tirerait:

$$2\pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,e^{-ixy}\,dy.$$

Posons alors:

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) e^{-izy} dz$$

d'où:

$$2\pi\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy} dy$$

l'équation (1) deviendra:

$$2\pi\Phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) f(x, y) e^{-izy} dz dy = \psi(x) \tag{2}$$

et prend ainsi la forme d'une équation de FREDHOLM, où $\Phi(x)$ est la fonction inconnue et où le noyau est

$$K(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-izy} dy.$$

Quelle est la condition pour que la méthode de FREDHOLM soit applicable à l'équation (2) qui peut s'écrire:

$$2\pi\Phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) K(x, z) dz = \psi(x).$$

L'intégrale étant prise entre des limites infinies, il faut chercher d'abord à la ramener à des limites finies; c'est ce qui est possible si $K(x, z)$ s'annule pour $z = \pm\infty$, et est pour $|z|$ très grand de l'ordre de $|z|^{-h}$, où $h > 1$. Si nous posons en effet

$$x = \operatorname{tg} \xi, \quad z = \operatorname{tg} \zeta$$

l'équation prend la forme:

$$2\pi\Phi(\operatorname{tg} \xi) + \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \Phi(\operatorname{tg} \zeta) K(\operatorname{tg} \xi, \operatorname{tg} \zeta) \frac{d\zeta}{\cos^2 \zeta} = \psi(\operatorname{tg} \xi);$$

ou mieux encore posons:

$$x = \operatorname{tg}^k \xi, \quad z = \operatorname{tg}^k \zeta$$

k étant un nombre suffisamment grand pour que

$$\frac{k}{k+1} > \frac{1}{h}$$

ce qui est toujours possible si $h > 1$; notre équation deviendra:

$$2\pi\,\Phi(\operatorname{tg}^k \xi) + \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} k\Phi(\operatorname{tg}^k \zeta) K(\operatorname{tg}^k \xi, \operatorname{tg}^k \zeta) \operatorname{tg}^{k-1} \zeta \frac{d\zeta}{\cos^2 \zeta} = \psi(\operatorname{tg}^k \xi).$$

Nous voyons que le nouveau noyau

$$kK(\operatorname{tg}^k \xi, \operatorname{tg}^k \zeta) \operatorname{tg}^{k-1} \zeta \frac{1}{\cos^2 \zeta}$$

se comporte pour $\zeta = \pm \frac{\pi}{2}$ comme:

$$\operatorname{tg}^{-kh} \zeta \operatorname{tg}^{k-1} \zeta \frac{1}{\cos^2 \zeta}$$

c'est à dire comme:

$$(\cos \zeta)^{kh-k-1}$$

et par conséquent reste fini puisque

$$kh - k - 1 > 0.$$

Pour préciser davantage nous supposerons que:

$$|K(x, z)| < Az^{-h}$$

A étant une constante indépendante de x et de z, et l'inégalité subsistant pour toutes les valeurs de x et de z depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

A quelles conditions cela correspond-il pour $f(x, y)$. Il faut d'abord que la méthode de Fourier puisse être appliquée à $f(x, y)$, c'est à dire:

1°. Que $f(x, y)$ considérée comme fonction de y n'admette qu'un nombre fini de maxima et de minima (quelle que soit la valeur constante attribuée à x).

2°. Que $f(x, y)$ tende uniformément vers zéro, quand y tend vers l'infini, et cela quel que soit x.

Si nous supposons de plus que $f(x, y)$ admet des dérivées des deux premiers ordres; que $\frac{df}{dy}$ tend uniformément vers zéro, quand y tend vers l'infini et que

$$\left|\frac{d^2 f}{dy^2}\right| < M \frac{1}{1+y^2}.$$

et qu'enfin $\frac{d^2 f}{dy^2}$ n'ait comme f qu'un nombre fini de maxima et de maxima, on aura en intégrant par parties:

$$\int f e^{-izy} dy = \frac{i}{z} f e^{-izy} + \frac{df}{dy} \frac{1}{z^2} e^{-izy} - \frac{1}{z^2} \int \frac{d^2 f}{dy^2} e^{-izy} dy$$

ou en prenant pour limites $y = \pm \infty$

$$K(x, z) = \int f e^{izy} dy = -\frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 f}{dy^2} e^{-izy} dy$$

d'où:

$$|K(x, z)| < \left|\frac{1}{z^2}\right| M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{M\pi}{|z|^2}.$$

Et comme d'ailleurs $|K(x, z)|$ reste fini même pour $z = 0$, on voit que les conditions sont remplies pour que la méthode de Fredholm soit applicable.

Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'elle le serait dans des cas beaucoup plus généraux et qu'il serait aisé de déterminer.

Cherchons à appliquer le même principe à des séries analogues à celles de Fourier et écrivons:

(3) $$\psi(x) = \Sigma A_m [e^{imx} + \lambda \theta_m(x)].$$

Partons de la formule de Fourier, en posant:

$$2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z) e^{-imz} dz; \quad \varphi(z) = \Sigma A_m e^{imz}$$

notre équation deviendra:

(4) $$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z) \Sigma e^{-imz} \theta_m(x) dz.$$

Dans l'équation (3), il s'agissait de déterminer les coëfficients A_m, connaissant les fonctions $\psi(x)$ et $\theta_m(x)$, c'est à dire de développer la fonction donnée $\psi(x)$ en série procédant suivant les fonctions $e^{imx} + \lambda \theta_m(x)$. Dans l'équation transformée (4), il s'agit de déterminer la fonction inconnue $\varphi(x)$ connaissant la fonction $\psi(x)$. Les deux problèmes sont manifestement équivalents, mais le

second se ramène à une équation intégrale, et la méthode de Fredholm y sera applicable pourvu que le noyau

$$\sum e^{-imz}\theta_m(x)$$

soit toujours fini.

C'est ce qui arrivera évidemment si la série

$$\sum |\theta_m(x)|$$

est absolument et uniformément convergente.

Soit par exemple à développer $\psi(x)$, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2π, suivant les exponentielles

$$e^{i\mu_m x}.$$

Nous pourrons ramener ces exponentielles à la forme

$$e^{imx} + \lambda\theta_m$$

en posant:

$$\lambda = 1, \quad \theta_m = e^{i\mu_m x} - e^{imx}.$$

Or on a

$$|\theta_m| < |\mu_m - m|\, x$$

puisque:

$$\theta_m = i\int_{mx}^{\mu_m x} e^{it}\,dt;$$

et que $|e^{it}| = 1$. Comme x varie de 0 à 2π; on aura:

$$|\theta_m| < 2\pi\, |\mu_m - m|.$$

Il suffit donc que la série

$$\sum |\mu_m - m|$$

soit absolument et uniformément convergente. C'est ce qui arrivera par exemple, si l'on a

$$\mu_m = m + \frac{1}{m^2}.$$

Ici encore, il serait aisé d'étendre le résultat à des cas beaucoup plus étendus.

Soit maintenant l'équation

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} \varphi(y)[e^{ixy} + \lambda f(x, y)]\,dy = \psi(x)$$

qui diffère de (1) parce que les limites ne sont plus infinies. Nous ne pouvons

pas nous proposer de déterminer la fonction inconnue φ, connaissant la fonction ψ; et cette fonction étant quelconque; le problème serait en général impossible. Il suffit pour s'en convaincre de faire $\lambda = 0$; on voit alors que quelle que soit la fonction $\varphi(y)$, la fonction ψ sera une fonction entière, qui tend vers zéro quand x tend vers l'∞, avec un argument compris entre 0 et π; et telle que $\psi e^{-2i\pi x}$ tende vers zéro quand x tend vers l'∞ avec un argument compris entre π et 2π. La fonction ψ ne peut donc pas être choisie arbitrairement.

Ce que nous nous donnerons, ce sont les valeurs $\psi(m)$ que prend la fonction ψ quand x prend une valeur entière positive ou négative. Il est aisé d'ailleurs de se rendre compte que ces valeurs $\psi(m)$ suffisent pour déterminer une fonction entière satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

Posons encore:

$$\varphi(z) = \Sigma A_m e^{-imz}, \quad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z) e^{imz} dz.$$

L'équation (5) devient alors:

$$2\pi A_m + \lambda \int_0^{2\pi} \Sigma A_p e^{-ipy} f(m, y) dy = \psi(m). \tag{6}$$

Cette équation doit permettre de déterminer les coëfficients A et par conséquent la fonction inconnue φ, quand on connaît les quantités $\psi(m)$.

Cette équation n'a plus la forme d'une équation intégrale, mais celle d'un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, tel que ceux qui ont fait l'objet des études de M. von Koch. L'analogie des deux théories est d'ailleurs évidente.

Pour que la méthode soit applicable, il faut et il suffit que le déterminant infini converge; il suffit donc qu'il soit normal au sens de M. von Koch, c'est à dire que la série double en m et p

$$\sum \int_0^{2\pi} e^{-ipy} f(m, y) dy \tag{7}$$

converge absolument. Si $f(m, y)$ est une fonction périodique de y avec une dérivée seconde, nos intégrales peuvent se transformer par une intégration par parties et la série (7) devient

$$\sum \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ipy}}{p^2} f''(m, y) dy.$$

Les termes en sont plus petits que ceux de la série:

$$\sum \frac{|f''|}{p^2} = \sum \frac{1}{p^2} \Sigma |f''|.$$

Il suffit donc que la série

$$\Sigma f''(m, z)$$

converge absolument et uniformément, ou encore que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x, z) dz$$

converge absolument et uniformément.

On voit par cet exemple quelles différences il y a en ce qui concerne les équations intégrales de 1ère espèce, entre les cas où les limites sont finies, et celui où elles sont infinies, cas auquel se rattacherait d'ailleurs celui où le noyau présenterait des singularités entre les limites d'intégration. Je me réserve de revenir sur cette question par des méthodes fondées sur l'itération des noyaux et qui mettront en évidence d'une autre manière les mêmes particularités.

RECHERCHES SUR UN CAS REMARQUABLE D'ÉPREUVES DÉPENDANTES.

PAR

ANDRÉ MARKOFF

À S:T PETERSBOURG.

Le cas remarquable d'épreuves dépendantes, que nous allons étudier, a été indiqué par moi au nombre des exemples[1] de la possibilité d'étendre aux valeurs dépendantes la loi de grands nombres, démontrée par TCHEBYCHEF, si simplement et ingénieusement, pour les valeurs indépendantes dans son mémoire[2] »Des valeurs moyennes».

En employant la méthode de TCHEBYCHEF, j'ai considéré l'espérance mathématique (la valeur probable) du carré d'une certaine somme. Or en considérant aussi les espérances mathématiques des puissances de la même somme, je me suis persuadé, que dans le cas présent ont lieu aussi les formules limites, établies par TCHEBYCHEF pour les valeurs indépendantes dans le mémoire[3] »Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités». Par conséquent notre cas fournit un exemple, à mon avis le premier, des valeurs dépendantes, pour lesquelles, ainsi que pour les valeurs indépendantes, nous pouvons démontrer,[4] que l'intégrale de Laplace

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt$$

[1] Bulletin de la société physico-mathématique de Kasan. II série, T. XV, N. 4.

[2] Oeuvres de P. L. TCHEBYCHEF. T. I, p. 687—694.

[3] Acta mathematica. T. XIV, p. 305—315.

[4] Voir les travaux de TCHEBYCHEF, mentionnés dans le mémoire cité ci-dessus, ma thèse de doctorat »Sur quelques applications des fractions continues algébriques», publiée en russe, le travail de M. C. POSSÉ au même titre, publié en français, et ma note »Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$» (Bull. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg. T. IX, N. 5)

sert de limite à la probabilité que la somme de ces valeurs sera comprise entre des limites fixées.

§ 1. Nous allons considérer les épreuves successives, assujetties par rapport à un événement E aux conditions suivantes:

1) la probabilité de E pour chacune de ces épreuves est égale au même nombre p, tant que leurs résultats restent absolument indéterminés;

2) la probabilité de E pour chaque épreuve est égale à l'autre nombre p_1, si les résultats des épreuves suivantes restent indéterminés et on sait, que l'épreuve immédiatement précédente a fait arriver l'événement E, indépendamment des résultats des autres épreuves;

3) la probabilité de E pour chaque épreuve a la troisième valeur p_2, si les résultats des épreuves suivantes sont indéterminés, comme auparavant, mais l'on sait, que l'épreuve immédiatement précédente a fait arriver l'événement contraire à E, indépendamment des résultats des autres épreuves.

Pour le dire en peu de mots, nous allons nous occuper des épreuves identiques liées en chaîne.

Nous désignons par F l'événement contraire à E et par

$$q, \; q_1, \; q_2$$

les probabilités de F, égales à

$$1-p, \; 1-p_1, \; 1-p_2.$$

Quant aux nombres p, p_1, p_2, nous ne pouvons pas les donner tous trois arbitrairement, car ils sont liés par l'égalité

$$(1) \qquad p = pp_1 + qp_2$$

facile à déduire, en considérant les épreuves voisines.

Ayant égard à cette égalité et en posant

$$(2) \qquad p_1 - p_2 = \delta,$$

nous réduirons les six nombres

$$p, \; p_1, \; p_2, \; q, \; q_1, \; q_2,$$

liés par les égalités

$$(3) \qquad p + q = p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = 1$$

aux trois nombres

$$p, \; q, \; \delta.$$

en établissant les formules

$$
(4) \qquad \begin{aligned} p_1 &= p + \delta q, \quad q_1 = q - \delta q, \\ p_2 &= p - \delta p, \quad q_2 = q + \delta p. \end{aligned}
$$

En abordant notre problème, nous nous occuperons en premier lieu de la recherche de la fonction génératrice pour la probabilité que dans les n épreuves l'événement E arrivera m fois et l'événement F arrivera $n - m$ fois.

Soit

$$P_{m,k}$$

la probabilité que dans les k premières épreuves l'événement E arrivera justement m fois; soient ensuite

$$P^0_{m,k}, \quad P'_{m,k}$$

les mêmes probabilités à la condition supplémentaire, laquelle pour $P^0_{m,k}$ consiste dans ce que l'événement E n'arrive pas à la $k^{\text{ième}}$ épreuve, et pour $P'_{m,k}$ consiste au contraire dans ce que l'événement E a lieu à la $k^{\text{ième}}$ épreuve; ainsi nous avons

$$
(5) \qquad P_{m,k} = P^0_{m,k} + P'_{m,k}.
$$

Pour

$$P^0_{m,k}, \quad P'_{m,k}, \quad P_{m,k}$$

nous formons, en introduisant un nombre ξ arbitraire, les trois fonctions génératrices

$$
(6) \qquad \varphi_k = \sum P^0_{m,k}\,\xi^m, \quad \psi_k = \sum P'_{m,k}\,\xi^m, \quad \omega_k = \sum P_{m,k}\,\xi^m,
$$

qui sont liées, en vertu de (5), par cette formule simple

$$
(7) \qquad \omega_k = \varphi_k + \psi_k.
$$

Cela étant, il est facile d'obtenir les formules suivantes

$$
(8) \qquad \begin{aligned} P^0_{m,k+1} &= q_1 P'_{m,k} + q_2 P^0_{m,k} \\ P'_{m,k+1} &= p_1 P'_{m-1,k} + p_2 P^0_{m-1,k} \end{aligned}
$$

pour passer des k épreuves aux $k+1$ épreuves, et par conséquent nous avons

$$
(9) \qquad \begin{aligned} \varphi_{k+1} &= q_1 \psi_k + q_2 \varphi_k, \\ \psi_{k+1} &= p_1 \xi \psi_k + p_2 \xi \varphi_k. \end{aligned}
$$

Or en éliminant des équations (9) l'une ou l'autre des fonctions φ et ψ, nous obtenons pour ces fonctions deux équations tout à fait identiques

$$\varphi_{k+2} - (p_1 \xi + q_2)\, \varphi_{k+1} + (p_1 - p_2)\, \xi\, \varphi_k = 0,$$
$$\psi_{k+2} - (p_1 \xi + q_2)\, \psi_{k+1} + (p_1 - p_2)\, \xi\, \psi_k = 0,$$

d'où par l'addition on trouve

$$\omega_{k+2} - (p_1 \xi + q_2)\, \omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\, \xi\, \omega_k = 0. \tag{10}$$

En vertu de cette équation, si l'on pose

$$\Omega(\xi, t) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^2 + \omega_3 t^3 + \ldots\ldots, \tag{11}$$

en introduisant un second nombre arbitraire t et en déterminant ω_0 par l'égalité

$$\omega_2 - (p_1 \xi + q_2)\, \omega_1 + (p_1 - p_2)\, \omega_0 = 0, \tag{12}$$

on trouve

$$\Omega(\xi, t) = \frac{L_0 + L_1 t}{1 - (p_1 \xi + q_2)\, t + (p_1 - p_2)\, \xi t^2},$$

où l'on a

$$L_0 = \omega_0 \text{ et } L_1 = \omega_1 - (p_1 \xi + q_2)\, \omega_0.$$

D'autre part, il est facile de trouver immédiatement

$$\omega_1 = p\xi + q,\ \ \omega_2 = p p_1 \xi^2 + (p q_1 + q p_2)\, \xi + q q_2,$$

d'où il résulte

$$\omega_0 = 1,$$

et ensuite

$$L_0 = 1 \text{ et } L_1 = (p - p_1)\, \xi + q - q_2.$$

En substituant ces valeurs de L_0 et L_1 dans l'expression indiquée de $\Omega(\xi, t)$ et en ayant égard aux formules (4) nous parvenons enfin à la formule

$$\Omega(\xi, t) = \frac{1 - \delta(q\xi - p)\, t}{1 - \{p\xi + q + \delta(q\xi - p)\}\, t + \delta \xi t^2}. \tag{13}$$

§ 2. La formule (13) nous servira aux recherches des espérances mathématiques des puissances du nombre d'arrivées de l'événement E: ces espérances mathématiques s'expriment par les sommes

$$\Sigma\, m^k P_{m,n}\ (m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

D'après ces sommes nous trouverons les sommes

$$\Sigma\,(m-pn)^k\,P_{m,n},$$

qui expriment les espérances mathématiques des puissances de la différence

$$m-pn,$$

pn étant égal à l'espérance mathématique de m. Mais en premier lieu il faut considérer l'espérance mathématique du produit

$$m\,(m-1)\ldots.(m-i+1),$$

en remarquant, que celle-ci est égale à la valeur de la dérivée

$$\frac{d^i\,\omega_n}{d\,\xi^i}$$

pour $\xi=1$ et par conséquent peut être déterminée comme le coefficient de t^n dans le développement de la fonction

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\,(\xi,t)}{d\,\xi^i}\right\}_{\xi=1}$$

suivant les degrés positifs et croissants de t. Conformément à cela, en différentiant la fonction $\Omega\,(\xi,t)$, déterminée par la formule (13), et en posant $\xi=1$, on trouve

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\,(\xi,t)}{d\,\xi^i}\right\}_{\xi=1}=\frac{1\,.\,2\,\ldots.\,i\,p\,t^i}{(1-t)^2}\left\{\frac{p}{1-t}+\frac{\delta q}{1-\delta t}\right\}^{i-1}. \tag{14}$$

Au moyen de cette formule, on obtient pour les petites valeurs de i des résultats assez simples; en posant, par exemple

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

on trouve

l'esp. math. de $m = np$

l'esp. math. de $m\,(m-1)=n\,(n-1)\,p^2+2\,pq\delta\,(n-1+(n-2)\,\delta+(n-3)\,\delta^2+\ldots)$

$\ldots\ldots.$de $m\,(m-1)\,(m-2)=n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3$

$$+\,6\,p^2 q\,\delta\,((n-1)\,(n-2)+(n-2)\,(n-3)\,\delta+\ldots)$$

$$+\,6\,pq^2\delta^2\,(n-2+2\,(n-3)\,\delta+3\,(n-4)\,\delta^2+\ldots)$$

$$
\begin{aligned}
\text{l'esp. m. de } m(m-1)(m-2)(m-3) = {} & n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 \\
& + 12\,p^3 q\delta\,\big((n-1)(n-2)(n-3) \\
& \qquad + (n-2)(n-3)(n-4)\delta + \ldots\big) \\
& + 36\,p^2q^2\delta^2\,\big((n-2)(n-3) \\
& \qquad + 2(n-3)(n-4)\delta + \ldots\big) \\
& + 24\,pq^3\delta^3\,\big(n-3+3(n-4)\delta \\
& \qquad + 6(n-5)\delta^2 + \ldots\big).
\end{aligned}
$$

En passant au cas général, nous remarquons, que la fonction

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega(\xi,t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1},$$

en vertu de la formule (14), se décompose en termes

$$\frac{(i-1)(i-2)\ldots(i-j)}{1.2\ldots j}\cdot\frac{1.2\ldots i\,p^{i-j}(\delta q)^j t^i}{(1-t)^{i-j+1}(1-\delta t)^j}.$$

En développant ensuite la fraction

$$\frac{t^i}{(1-t)^{i-j+1}(1-\delta t)^j}$$

en une série suivant les puissances croissantes de t, on trouve que le coefficient de t^n dans cette série s'exprime par la somme

$$\frac{(n-j)(n-j-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots(i-j)} + j\delta\frac{(n-j-1)(n-j-2)\ldots(n-i)}{1.2\ldots(i-j)}$$

$$+\frac{j(j+1)}{1.2}\delta^2\frac{(n-j-2)(n-j-3)\ldots(n-i-1)}{1.2\ldots(i-j)}+\ldots,$$

arrêtée aux termes égaux à zéro; or en ajoutant lès plusieurs termes égaux à zéro, on peut prolonger cette somme jusqu'à δ^{n-j-1} inclusivement.

Ayant égard aux produits

$$(n-j-\lambda)(n-j-\lambda-1)\ldots(n-i-\lambda+1),$$

constituant cette somme, nous les réduirons aux polynomes ordonnés suivant les puissances décroissantes de n:

$$n^{i-j}-\frac{(i-j)(i+j+2\lambda-1)}{2}n^{i-j-1}+\ldots$$

Par conséquent notre somme se présentera sous la forme d'un polynome

(15) $$C_0\, n^{i-j} + C_1\, n^{i-j-1} + \dots$$

dont les coefficients

$$C_0,\ C_1, \dots$$

s'expriment par les sommes des premiers $n-j$ termes des séries infinies, qui ne dépendent de n et sont ordonnées suivant les puissances croissantes de δ. D'ailleurs il est facile de se persuader, qu'en vertu des inégalités

$$0 < p < 1,\quad 0 < p_1 < 1,\quad 0 < p_2 < 1$$

le carré de δ doit être plus petit que l'unité et que l'inégalité

$$\delta^2 < 1$$

suffit pour la convergence de notres séries infinies.

Pour notre but final il est important d'établir la formule conditionnelle

(16) $$1 . 2 \dots (i-j)\, C_0 = (1-\delta)^{-j},$$

où au lieu de la somme infinie

$$1 + j\delta + \frac{j(j+1)}{1 . 2}\delta^2 + \frac{j(j+1)(j+2)}{1 . 2 . 3}\delta^3 + \dots$$

égale à $(1-\delta)^{-j}$, il faut prendre

$$1 + j\delta + \frac{j(j+1)}{1 . 2}\delta^2 + \dots + \frac{j(j+1)\dots(n-2)}{1 . 2 \dots (n-j-1)}\delta^{n-j-1}.$$

La formule (16) fait évidente la limite de C_0, lorsque n augmente infiniment.

En vertu des calculs indiqués l'espérance mathématique du produit

$$m(m-1)\dots(m-i+1)$$

s'exprime sous la forme d'un polynome, ordonné suivant les puissances entières et positives de n.

Les coefficients de ce polynome s'obtiennent des séries convergentes infinies qui ne dépendent pas de n et sont ordonnées suivant les degrés croissants de δ, si l'on écarte tous les termes contenant δ^n et les plus grands degrés de δ.

En même temps il est facile de voir, que notre polynome, exprimant l'espérance mathématique de

$$m(m-1)\dots(m-i+1),$$

ne contient les nombres p et q que dans les degrés entiers et positifs, et que dans tous ses termes la somme des degrés de p et de q est égale à i et le degré de p n'est pas moindre que le degré de n.

Enfin si l'on écarte tous les termes, où le degré de p surpasse le degré de n, et l'on désigne le reste de l'expression considérée par le symbole

$$[(m,\, i)]_0,$$

les calculs indiqués donnent la formule[1]

$$\begin{aligned}[(m,\, i)]_0 = {} & (np)^i + i\,(i-1)\,\frac{\delta q}{1-\delta}\,(np)^{i-1} + \frac{i\,(i-1)^2\,(i-2)}{1\,.\,2}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^2 (np)^{i-2} + \\ & \ldots\ldots + \frac{i\,(i-1)^2 \ldots\ldots (i-j+1)^2\,(i-j)}{1\,.\,2\ldots j}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^j (np)^{i-j} + \ldots\ldots;\end{aligned} \tag{17}$$

le membre droit de cette formule, développé en série suivant les puissances croissantes de δ, ne doit être prolongé que jusqu'à δ^{n-1} inclusivement.

D'autre part, en exprimant les puissances de m par les produits de la forme considérée, on obtient la formule connue

$$\begin{aligned} m^i = {} & m\,(m-1)\ldots(m-i+1) + A_{1,i}\,m\,(m-1)\ldots(m-i+2) + \\ & + \ldots\ldots + A_{j,i}\,m\,(m-1)\ldots(m-i+j+1) + \ldots\ldots,\end{aligned} \tag{18}$$

dont les coefficients

$$A_{1,i},\ A_{2,i},\ \ldots,\ A_{i-1,i}$$

ne dépendent pas de m.

On peut calculer $A_{j,i}$ au moyen des égalités[2]

$$\begin{aligned} A_{1,i} &= \frac{i\,(i-1)}{2}, \quad A_{i,i} = 0 \\ A_{j,i+1} &= A_{j,i} + (i-j+1)\,A_{j-1,i}\end{aligned} \tag{19}$$

faciles a déduire; de ces égalités on trouve successivement

[1] Nous n'avons pas égard à l'égalité $p + q = 1$.

[2] Les mêmes coefficients $A_{j,i}$ entrent aussi dans la formule

$$\frac{d^i f(e^x)}{dx^i} = e^{xi} f^{(i)}(e^x) + A_{1,i}\, e^{x(i-1)} f^{(i-1)}(e^x) + A_{2,i}\, e^{x(i-2)} f^{(i-2)}(e^x) + \ldots$$

$$
\begin{array}{llllllll}
A_{1,2}=1, & A_{1,3}=3, & A_{1,4}=6, & A_{1,5}=10, & A_{1,6}=15, & A_{1,7}=21, & A_{1,8}=28, & A_{1,9}=36 \\
 & A_{2,3}=1, & A_{2,4}=7, & A_{2,5}=25, & A_{2,6}=65, & A_{2,7}=140, & A_{2,8}=266, & A_{2,9}=462 \\
 & & A_{3,4}=1, & A_{3,5}=15, & A_{3,6}=90, & A_{3,7}=350, & A_{3,8}=1050, & A_{3,9}=2646 \\
 & & & A_{4,5}=1, & A_{4,6}=31, & A_{4,7}=301, & A_{4,8}=1701, & A_{4,9}=6951 \\
 & & & & A_{5,6}=1, & A_{5,7}=63, & A_{5,8}=966, & A_{5,9}=7770 \\
 & & & & & A_{6,7}=1, & A_{6,8}=127, & A_{6,9}=3025 \\
 & & & & & & A_{7,8}=1, & A_{7,9}=255 \\
 & & & & & & & A_{8,9}=1.
\end{array}
$$

Or les égalités (19) fournissent aussi la formule

$$
A_{j,i}=\frac{i(i-1)\ldots(i-j)}{2\cdot 4\ldots 2j}(i^{j-1}+\alpha i^{j-2}+\beta i^{j-3}+\ldots) \tag{20}
$$

où $\alpha, \beta, \ldots.$ ne dépendent pas de i.

En nous servant de la formule (20), nous pouvons introduire dans nos calculs les quantités $A_{j,0}, A_{j,1}, \ldots, A_{j,j}$, égales à zéro, qui ne se présentent pas dans la formule (18).

Cela étant, il est aisé de parvenir aux conclusions suivantes.

L'espérance mathématique de m^i peut être présentée sous la forme d'un polynome, ordonné suivant les puissances entières et positives de n.

Les coefficients de ce polynome s'obtiennent des séries convergentes qui sont ordonnées suivant les puissances croissantes de δ et ne dépendent pas de n, si l'on écarte tous les termes, contenant δ^n et les plus grandes puissances de δ.

Quant aux nombres p et q, ils n'entrent dans ce polynome qu'aux degrés entiers et positifs, la somme des degrés de p et de q ne surpassant pas i et le degré de p dans chaque terme de ce polynome n'étant pas moindre que le degré de n. Enfin, si l'on écarte tous les termes, où le degré de p surpasse le degré de n, et l'on désigne le reste par le symbole $[m^i]_0$, il est facile d'obtenir la formule

$$
\left\{
\begin{aligned}
{[m^i]_0} = {} & (np)^i + A_{1,i}(np)^{i-1} + A_{2,i}(np)^{i-2} + \cdots \\
& + \{i(i-1)(np)^{i-1} + A_{1,i}(i-1)(i-2)(np)^{i-2} + \cdots\}\frac{\delta q}{1-\delta} \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left\{
\begin{aligned}
& \frac{i(i-1)^2\ldots(i-j+1)^2(i-j)}{1\cdot 2\ldots\ldots j}(np)^{i-j} \\
& A_{1,i}\frac{(i-1)(i-2)^2\ldots(i-j)^2(i-j-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots j}(np)^{i-j-1} + \ldots
\end{aligned}
\right\}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^j \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right. \tag{21}
$$

qui a le même sens conditionnel que la formule (17).

§ 3. Passons à l'espérance mathématique des puissances de la différence

$$m - pn.$$

En nous servant de la formule

$$(m - pn)^k = m^k - k m^{k-1} pn + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} m^{k-2} (pn)^2 - \dots \tag{22}$$

nous déduisons des résultats précédentes les conclusions suivantes.

L'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

peut être présentée sous la forme d'un polynome

$$R_k^{(k)} n^k + R_{k-1}^{(k)} n^{k-1} + \dots + R_i^{(k)} n^i + \dots + R_0^{(k)}, \tag{23}$$

dont les coefficients

$$R_k^{(k)},\ R_{k-1}^{(k)}, \dots\dots,\ R_i^{(k)}, \dots\ R_0^{(k)},$$

étant des fonctions entières de

$$p,\ q,\ \delta,$$

s'obtiennent des séries convergentes infinies, qui ne dépendent pas de n et sont ordonnées suivant les puissances croissantes de δ, par l'écartement de tous les termes contenants δ^n et les plus grandes puissances de δ. Nos calculs font évident aussi, que la fonction $R_i^{(k)}$ contient le facteur p^i et que la somme des degrés de p et de q dans chaque terme de cette fonction ne surpasse pas k.

Nous sommes parvenus au polynome (23), en étudiant les calculs fixés; maintenant il est important de remarquer, que les coefficients $R_i^{(k)}$ du polynome (23) ne dépendent pas de la méthode employée mais sont tout à fait déterminés par la condition qu'ils s'obtiennent de séries, qui ne dépendent pas de n et sont ordonnées suivant les puissances croissantes de δ, par l'écartement de tous les termes contenants δ^n et les plus grandes puissances de δ.

Or nous pouvons parvenir à la même expression (23) de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

par une autre voie, en considérant au lieu du nombre des arrivées de l'événement E le nombre des arrivées de l'événement F, contraire à E.

Pour effectuer cette passage de E à F, il faut prendre $n - m$ au lieu de m et transposer p et q, conformément aux formules (4).

De cette manière on remplace la différence

$$m - pn$$

par la suivante

$$n - m - qn,$$

qui ne diffère de la précédente que par le signe $\pm$, car leur somme

$$m - pn + n - m - qn$$

est évidemment égale à zéro.

Par conséquent les puissances paires de ces différences sont égaux et leurs puissances impaires ne diffèrent que par le signe $\pm$.

Il en résulte, que l'expression trouvée (23) de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

ne change pas sa valeur absolue, si l'on transpose p et q; en sorte que cette transposition ne change pas $R_i^{(k)}$, si k est pair, et transforme $R_i^{(k)}$ en $- R_i^{(k)}$, si k est impair.

Cela étant, ayant découvert dans $R_i^{(k)}$ le facteur p^i, nous pouvons assurer, que $R_i^{(k)}$ doit contenir aussi un facteur identique avec q^i en vertu de l'égalité $p + q = 1$.

Par conséquent, si la fonction $R_i^{(k)}$ ne se réduit à zéro, elle doit contenir les termes, où la somme des degrés de p et q n'est pas moindre que $2i$, en vertu de quoi on a

$$2i < k, \tag{24}$$

car la somme des degrés de p et de q dans la fonction $R_i^{(k)}$ ne surpasse pas k.

Donc on a

$$R_{2l-1}^{(2l-1)} = R_{2l-2}^{(2l-1)} = \ldots\ldots = R_l^{(2l-1)} = 0$$

et

$$R_{2l}^{(2l)} = R_{2l-1}^{(2l)} = \ldots\ldots\ldots = R_{l+1}^{(2l)} = 0,$$

l étant un nombre entier positif, et par suite

$$\lim_{n=\infty} \text{. de l'esp. math. de } \left(\frac{m - np}{\sqrt{n}}\right)^{2l-1} = 0 \tag{25}$$

et

$$\lim_{n=\infty} \text{. de l'esp. math. de } \left(\frac{m - np}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = \lim. R_l^{(2l)}. \tag{26}$$

La quantité $R_l^{(2l)}$ se représente, en vertu de nos calculs, sous la forme de telle somme

$$\begin{aligned}&a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots . + a_{l-1} p^l q^{l-1} + a_l p^l q^l \\ &+ b_0 p^{l+1} + b_1 p^{l+1} q + b_2 p^{l+1} q^2 + \ldots . . + b_{l-1} p^{l+1} q^{l-1} \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

dont les coefficients ne dépendent pas de p et de q.

Or cette somme se détermine aisément par la ligne première

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots . + a_{l-1} p^l q^{l-1} + a_l p^l q^l .$$

En effet, en multipliant les termes de la somme

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots + a_{l-1} p^l q^{l-1} + a_l p^l q^l$$

par

$$(1 - p)^l,\ (1 - p)^{l-1},\ (1 - p)^{l-2}, \ldots . ., \ 1 - p,\ 1,$$

nous la transformons dans la somme

$$(27)\quad S = a_0 p^l (1 - p)^l + a_1 p^l (1 - p)^{l-1} q + \ldots + a_{l-1} p^l (1 - p) q^{l-1} + a_l p^l q^l ,$$

laquelle est égale à

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{l-1} + a_l)\, p^l q^l$$

et ne se change pas par la transposition de p et q. Il en résulte, que la transposition de p et q ne change pas aussi la différence

$$R_l^{(2l)} - S.$$

D'autre part, il est évident, que cette différence contient le facteur p^{l+1}, et par suite elle doit contenir aussi un facteur identique avec q^{l+1} en vertu de l'égalité $p + q = 1$; ce qui est impossible, si elle ne se réduit à zéro; car elle ne contient que les termes, où la somme des degrés de p et q ne surpasse pas $2l$

Donc on a

$$(28)\qquad R_l^{(2l)} = (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{l-1} + a_l)\, p^l q^l ,$$

la somme

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots . + a_l p^l q^l$$

étant égale au coefficient de n^l dans l'expression

$$[(m - pn)^{2l}]_0 ,$$

déduite de l'expression (23) de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^{2l}$$

par l'écartement de tous les termes, où le degré de p surpasse l.

Enfin, ayant égard à la formule

$$[(m - pn)^{2l}]_0 = [m^{2l}]_0 - 2lpn\,[m^{2l-1}]_0 + \frac{2l(2l-1)}{1.2}\,p^2n^2[m^{2l-2}]_0 - \cdots$$

et en nous servant de l'expression de $[m^i]_0$ trouvée plus haut, nous obtenons la formule

$$\begin{aligned} a_j : \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j = {} & \frac{(l+j)(l+j-1)^2 \ldots (l+1)^2 l}{1.2\ldots j} A_{l-j,2l} \\ & - \frac{2l}{1}\,\frac{(l+j-1)(l+j-2)^2 \ldots l^2(l-1)}{1.2\ldots j} A_{l-j,2l-1} \\ & + \frac{2l(2l-1)}{1.2}\,\frac{(l+j-2)(l+j-3)^2 \ldots (l-1)^2(l-2)}{1.2\ldots j} A_{l-j,2l-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \frac{2l(2l-1)\ldots(l+2)}{1.2\ldots(l-1)}\,\frac{(j+1)j^2(j-1)^2\ldots 2^2.1}{1.2\ldots j} A_{l-j,l+1}, \end{aligned}$$

qui en vertu de la formule (20) nous donne[1]

$$\begin{aligned} a_j &= \Delta^{2l}_{x=0}\,\frac{(x+j-l)(x+j-l-1)^2 \ldots (x-l+1)^2(x-l)}{1.2.3\ldots j} A_{l-j,x}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j \\ &= \Delta^{2l}\,\frac{x^{2l}}{1.2\ldots j.2.4\ldots 2(l-j)}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j \\ &= \frac{l(l-1)\ldots(l-j+1)}{1.2.3\ldots j}\,1.3.5\ldots(2l-1)\left(\frac{2\delta}{1-\delta}\right)^j \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(29).\qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_l = 1.3.5\ldots(2l-1)\left(1 + \frac{2\delta}{1-\delta}\right)^l.$$

Ces formules ont évidemment le même sens conditionnel, que la formule (16).

La formule (29) fournit la limite de la somme

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_l,$$

lorsque n augmente infiniment.

[1] $\Delta^k f(x)_{x=0} = f(k) - \frac{k}{1} f(k-1) + \frac{k(k-1)}{1.2} f(k-2) - \ldots\ldots \pm f(0)$

Nous parvenons de cette manière à l'égalité

$$\lim_{n=\infty} R_l^{(2l)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2l-1) \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} pq\right)^l$$

et par suite

$$(30) \qquad \lim_{n=\infty}. \text{ de l'esp. math. de } \left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2l-1) \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} pq\right)^l.$$

Donc nous avons

$$\lim_{n=\infty}. \text{ de l'esp. math. de } \left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l-1} = 0$$

et

$$\lim_{n=\infty}. \text{ de l'esp. math. de } \left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2l-1) \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} pq\right)^l,$$

et en vertu des recherches mentionnées ci-dessus nous pouvons établir la proposition suivante.

La probabilité des inégalités

$$np + t_1 \sqrt{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}n} < m < np + t_2 \sqrt{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}n},$$

où n est le nombre des épreuves considérées, m est le nombre d'arrivées de l'événement E et t_1, t_2 sont deux nombres constants arbitraires, converge à la limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

lorsque n augmente infiniment.

§ 4. Notre question admet une généralisation considérable, signalée par M. A. Liapounoff; à savoir, en conservant les autres conditions, on peut poser, que la probabilité de E, tant que les résultats de nos épreuves sont absolument indéterminées, n'a pas une même valeur pour toutes ces épreuves, mais dépend de leur position. En abordant cette généralisation de notre question et en désignant par

$$p', \ p'', \ldots, p^{(n)}, \ldots$$

la probabilité de E pour les épreuves successives, nous obtenons au lieu de (1) l'équation suivante

$$(31) \qquad p^{(n)} = p_1 p^{(n-1)} + p_2 (1 - p^{(n-1)})$$

dont la résolution aux termes précédents s'exprime par la formule

$$p^{(n)} = p + (p' - p)\,\delta^{n-1}. \tag{32}$$

Il est évident de cette formule, que p sert maintenant de la limite, à laquelle s'approche $p^{(n)}$, quand n augmente infiniment.

D'autre part, il est facile d'obtenir, pour la question généralisée, la même équation

$$\omega_{k+2} - (p_1 \xi + q_2)\,\omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\,\xi\,\omega_k = 0,$$

en conservant toutes nos désignations, employées auparavant.

Quant à la fonction $\Omega(\xi, t)$, la fonction génératrice de ω_n, pour la question généralisée elle ne diffère de la fonction $\Omega(\xi, t)$ précédente que par son numérateur; le nouvel numérateur s'obtient du numérateur, trouvé auparavant, par changement de ω_1, la nouvelle expression ω_1 étant égale à $p'\xi + q'$ au lieu de $p\xi + q$. Cela étant, pour la généralisation signalée de notre question il faut et il suffit à la fonction $\Omega(\xi, t)$, trouvée auparavant, ajouter la fonction $\Delta(\xi, t)$, déterminée par la formule

$$\Delta(\xi, t) = \frac{(p' - p)(\xi - 1)\,t}{1 - \{p\xi + q + \delta(q\xi + p)\}\,t + \delta\xi t^2}. \tag{33}$$

Or d'après l'accroissement de $\Omega(\xi, t)$ il est facile de trouver aussi les accroissements correspondants des espérances mathématiques considérées par nous; car leurs accroissements se déterminent par les mêmes formules, que ces valeurs mêmes, à la seule différence, que la fonction $\Omega(\xi, t)$ doit être remplacée par $\Delta(\xi, t)$.

En premier lieu l'accroissement de l'espérance mathématique du produit

$$m(m-1)\ldots(m-i+1)$$

s'exprime par le coefficient de t^n dans le développement de

$$\left\{\frac{d^i \Delta(\xi, t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1} = \frac{1 \cdot 2 \ldots i\,(p' - p)\,t^i}{(1-t)(1-\delta t)} \left\{\frac{p}{1-t} + \frac{\delta q}{1-\delta t}\right\}^{i-1} \tag{34}$$

en série ordonnée suivant les puissances croissantes de t. En étudiant ces coefficients et en passant du produit

$$m(m-1)\ldots(m-i+1)$$

successivement aux puissances de m et de $m - pn$, on trouvera, que l'accroissement de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

peut être présenté, par la méthode employée ci-dessus, sous la forme d'un polynome

(35) $$T_{k-1}^{(k)} n^{k-1} + T_{k-2}^{(k)} n^{k-2} + \ldots + T_0^{(k)}$$

analogue au polynome (23).

Les rapports

$$\frac{T_{k-1}^{(k)}}{p' - p}, \frac{T_{k-2}^{(k)}}{p' - p}, \ldots\ldots, \frac{T_0^{(k)}}{p' - p}$$

sont des fonctions entières de p et q; la méthode précédente fait évident aussi, que la fonction

$$T_i^{(k)} : (p' - p)$$

contient la facteur p^i et que la somme des degrés de p et q dans chaque terme de cette fonction ne surpasse pas $k - 1$.

D'autre part il n'est pas difficile de démontrer, par le passage de E à F, que l'accroissement considéré de l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^k$$

ne change pas sa valeur absolue, si l'on transpose simultanément

$$p \text{ et } q, \; p' \text{ et } q' = 1 - p'.$$

De là découlent les égalités

$$T_{2l-2}^{(2l-1)} = T_{2l-3}^{(2l-1)} = \ldots = T_l^{(2l-1)} = 0$$

et

$$T_{2l-1}^{(2l)} = T_{2l-2}^{(2l)} = \ldots = T_l^{(2l)} = 0.$$

Donc la généralisation de notre problème, signalée par M. A. Liapounoff, ne change pas la limite trouvée auparavant, à laquelle converge l'espérance mathématique de

$$\left(\frac{m - pn}{\sqrt{n}}\right)^k$$

lorsque n augmente infiniment; et par conséquent, en généralisant de cette ma-

nière notre problème, nous pouvons maintenir la proposition, établie plus haut, sur la limite de la probabilité des inégalités

$$np + t_1 \sqrt{2pq\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)n} < m < np + t_2 \sqrt{2pq\frac{1+\delta}{1-\delta}n}.$$

§ 5. Nos considérations sont basées en grande partie sur la symétrie de certaines expressions par rapport à p et q. Cette circonstance particulière empêche beaucoup de généraliser nos resultats.

En cherchant à les étendre à des valeurs quelconques liées en chaîne, j'ai modifié les considérations exposées de telle manière qu'il devient superflu de s'appuyer à la symétrie susdite.

Pour ce but nous remarquons que l'espérance mathématique de

$$(m - pn)^i$$

peut être déterminée immédiatement par le coefficient de t^n dans le développement de la fonction

$$\left|\frac{d^i \Omega(e^\eta, te^{-p\eta})}{d\eta^i}\right|_{\eta=0}$$

suivant les puissances positives et croissantes de t. Or en étudiant cette fonction de t et en posant

$$V = 1 - (p_1 e^\eta + q_2) t e^{-p\eta} + (p_1 - p_2) e^\eta t^2 e^{-2p\eta}$$

et

$$\Omega(e^\eta, te^{-p\eta}) = \frac{U}{V},$$

nous pouvons nous servir des formules très connues

$$\left(\frac{U}{V}\right)^{(i)} = U\left(\frac{1}{V}\right)^{(i)} + \frac{i}{1} U'\left(\frac{1}{V}\right)^{(i-1)} + \cdots$$

et

$$\left(\frac{1}{V}\right)^{(i)} = \sum \frac{i!\, j!\, (-V')^\lambda}{V^{j+1}\, \lambda!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}V''\right)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2\cdot 3}V'''\right)^\nu}{\nu!} \cdots\cdots$$

où l'on a

$$\lambda + \mu + \nu + \cdots = j \text{ et } \lambda + 2\mu + 3\nu + \cdots = i.$$

Au moyen des ces formules il n'est pas difficile de tirer de l'expression

$$\left|\frac{d^i \Omega(e^\eta, te^{-p\eta})}{d\eta^i}\right|_{\eta=0}$$

son terme principal de la forme

$$\frac{A}{(1+t)^{\frac{i}{2}+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{(1-t)^{\frac{i}{2}+1}},$$

déterminant nos resultats.

Nos considérations modifiées peuvent être étendues aussi à des valeurs quelconques liées en chaîne, ce que j'ai fait dans le mémoire »Amplification des théorèmes limites du calcul des probabilités à la somme des valeurs liées en chaîne», publié en russe (Mem. de l'Acad. des sciences de St. Petersbourg. VIII série, Vol. XXII, N. 9).

SUR LES FONCTIONS TRIPLEMENT PÉRIODIQUES DE DEUX VARIABLES.

PAR

P. COUSIN

À BORDEAUX.

La théorie des fonctions méromorphes triplement périodiques de deux variables complexes semble n'avoir été jusqu'ici l'objet d'aucune étude spéciale. Tandis que dans la théorie des fonctions d'une seule variable, l'étude des fonctions simplement périodiques et, en particulier, des fonctions trigonométriques a précédé celle des fonctions elliptiques, au contraire pour les fonctions périodiques de deux variables les mathématiciens ont abordé directement le cas des fonctions abéliennes. Il s'est trouvé ainsi, dans la théorie des fonctions périodiques, une lacune que M. APPELL avait signalée à notre attention il y a plusieurs années. Tout le présent Mémoire a pour but de combler ce vide dans une certaine mesure, en établissant les principes fondamentaux de la théorie des fonctions triplement périodiques de deux variables.

Notre travail est divisé en trois parties. L'introduction est consacrée à des propriétés des systèmes de périodes; nous avons dû reprendre sommairement quelques résultats connus pour les adapter, en les précisant, à la suite de notre Mémoire. Nous introduisons ensuite la notion nouvelle d'un *invariant* pour $(n+1)$ systèmes de périodes (dans le cas de n variables) et les entiers caractéristiques correspondants. Dans la première Partie nous étudions les zéros des fonctions triplement périodiques et nous sommes ainsi conduit à démontrer que *l'invariant* défini dans l'Introduction est nécessairement positif. Cette condition d'inégalité que nous rattachons à la loi de distribution des zéros d'une certaine fonction entière d'une variable, donne, lorsqu'on l'applique aux fonctions abéliennes toutes les inégalités de RIEMANN. On a ainsi une interprétation nouvelle de ces inégalités classiques. La fin de la première Partie est consacrée à la recherche

d'une expression analytique générale des fonctions méromorphes triplement périodiques.

La seconde Partie est consacrée tout entière à des classes spéciales de fonctions triplement périodiques que nous appelons *semi-rationnelles.* Ces fonctions ont les propriétés des fonctions abéliennes avec quelques modifications qui rappellent tout à fait la dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions trigonométriques. Cette analogie se trouve pleinement confirmée par le théorème suivant qui termine notre Mémoire.

Si une fonction méromorphe de deux variables admet trois systèmes de périodes non exceptionnels et n'admet aucun système de périodes distinct des précédents, si en outre cette fonction est liée à ses deux dérivées partielles du premier ordre par une relation algébrique, on peut, après avoir effectué sur les variables une substitution linéaire convenable, mettre cette fonction sous forme d'une fraction rationelle en e^y, les coefficients étant des fonctions Θ de la seule variable x. La fonction est alors, d'après cela, ce que nous appelons une fonction *semi-rationnelle.*

Introduction.[1]

1. On dit que les zéros d'une fonction entière $f(x, y)$ des deux variables x et y admettent le système de périodes (a, b) ou encore que (a, b) est un système de périodes appartenant aux zéros de $f(x, y)$, lorsqu'il existe une identité de la forme suivante:

$$f(x + a, y + b) = e^{g(x,y)} f(x, y),$$

où $g(x, y)$ est une fonction entière de x et y; en d'autres termes $f(x + a, y + b)$ et $f(x, y)$ admettent les mêmes zéros et au même degré de multiplicité.

Si nous considérons deux systèmes de périodes (a_1, b_1) et (a_2, b_2) appartenant tous deux aux zéros de la fonction entière $f(x, y)$ et les deux identités correspondantes

$$f(x + a_1, y + b_1) = e^{g_1(x,y)} f(x, y) \tag{1}$$

$$f(x + a_2, y + b_2) = e^{g_2(x,y)} f(x, y) \tag{2}$$

les deux fonctions entières $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ satisfont à la relation suivante:

[1] Sur les questions traitées dans cette introduction on pourra consulter entre autres travaux: le Mémoire de M. Appell *Sur les fonctions périodiques.* (Journal de Liouville 1891). — Un mémoire de M. Poincaré *Sur les fonctions abéliennes* (American Journal); enfin notre Mémoire sur les fonctions périodiques (Annales de l'École normale supérieure 1902) et notre Note (Société des Sciences physiques de Bordeaux 1903).

$$(3)\qquad g_1(x+a_2, y+b_2)-g_1(x,y)-[g_2(x+a_1, y+b_1)-g_2(x,y)]=2i\pi m_{1,2},$$

où $m_{1,2}$ est un entier positif, négatif ou nul. Cette identité s'obtient immédiatement par le procédé habituel qui consiste à changer x et y en $x+a_2$, $y+b_2$ dans (1) et en $x+a_1$, $y+b_1$ dans (2).

Nous dirons que l'entier $m_{1,2}$ est l'entier caractéristique (ou simplement l'entier) relatif aux deux systèmes de périodes (a_1, b_1), (a_2, b_2). De la forme de la relation (3) qui sert de définition à $m_{1,2}$, il résulte que

$$m_{1,2}=-m_{2,1}$$

c'est-à-dire que le signe de l'entier change lorsqu'on échange entre eux (a_1, b_1) et (a_2, b_2). Lorsque nous parlerons de l'entier relatif à deux systèmes de périodes, il faudra donc tenir compte de l'ordre dans lequel sont énoncés les deux systèmes de périodes; de telle sorte que l'entier relatif à (a_1, b_1), (a_2, b_2) est égal et de signe contraire à l'entier relatif à (a_2, b_2), (a_1, b_1).

Rien n'empêche de supposer dans ce qui précède que les deux systèmes de périodes (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont identiques, c'est-à-dire que $a_2=a_1$ et $b_2=b_1$. L'entier caractéristique est alors évidemment nul ce qui peut s'exprimer par l'égalité: $m_{1,1}=0$.

Si l'on effectue sur les variables x et y une substitution linéaire qui remplace ces deux variables par les variables X et Y, si (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont les deux systèmes de périodes qui pour X et Y correspondent à (a_1, b_1) et (a_2, b_2), il est clair que l'entier caractéristique pour (A_1, B_1), (A_2, B_2) est le même que celui qui est relatif à (a_1, b_1) et (a_2, b_2). On voit aussi bien facilement que si on multiplie l'une par l'autre deux fonctions entières dont les zéros admettent les deux mêmes systèmes de périodes (a_1, b_1) et (a_2, b_2), pour le produit obtenu l'entier caractéristique sera égal à la somme des entiers caractéristiques des deux facteurs.

Enfin si $f(x, y)$ est une fonction qui ne s'annule pour aucun système de valeurs de x et y, on voit sans peine que l'entier caractéristique $m_{1,2}$ est nul.

Il en résulte que si l'on multiplie une fonction entière dont les zéros admettent les deux systèmes de périodes (a_1, b_1), (a_2, b_2) par une fonction entière qui ne s'annule pas, on n'altère pas, par cette opération, la valeur de l'entier $m_{1,2}$.

2. La relation entre quatre systèmes de périodes appartenant aux zéros de $f(x, y)$ et les six entiers caractéristiques relatifs à ces quatre systèmes pris deux à deux des six façons possibles est la suivante:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &m_{1,2}(a_3b_4-a_4b_3)+m_{1,3}(a_4b_2-a_2b_4)+m_{1,4}(a_2b_3-a_3b_2)\\ &+m_{2,3}(a_1b_4-a_4b_1)+m_{2,4}(a_3b_1-a_1b_3)+m_{3,4}(a_1b_2-a_2b_1)=0,\end{aligned}$$

dans laquelle (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4) sont les quatre systèmes de périodes et les m sont les entiers caractéristiques conformément aux notations précédentes. La relation précédente peut encore s'écrire comme il suit:

$$\Sigma\, m_{\alpha,\beta}\, a_\gamma b_\delta = 0 \tag{5}$$

la sommation s'étendant aux douze permutations $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ des quatre nombres 1, 2, 3, 4 pour lesquelles le nombre des inversions (au sens de la théorie des déterminants) a une même parité; en tenant compte de ce que $m_{\alpha,\beta} = -m_{\beta,\alpha}$, les relations (4) et (5) sont évidemment les mêmes.

La relation (4) est absolument générale; elle a toujours lieu, que les quatre systèmes de périodes soient distincts ou non; quelques uns d'entre eux peuvent même être identiques. La relation est vraie même si $f(x, y)$ se réduit à une constante non nulle, car alors tous les entiers caractéristiques sont nuls. Le seul cas d'exception, sans aucun intérêt, est celui où $f(x, y)$ est nulle identiquement. Dans le cas où les quatre systèmes sont distincts, cette relation (4) est celle qui lie nécessairement les périodes d'une fonction abélienne. La démonstration qui a été donnée par M. Appell et que nous avons étendue au cas des fonctions de n variables $(n+2)$-fois périodiques, s'applique très bien au point de vue général auquel nous nous plaçons ici.

Pour le montrer, remarquons que si l'on effectue sur x et y une substitution linéaire quelconque définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= l X + n Y \\ y &= l' X + n' Y \end{aligned} \tag{6}$$

et que l'on désigne par (A_k, B_k) le système de périodes relatif à X et Y qui correspond à (a_k, b_k), $(k = 1, 2, 3, 4)$, la relation (4) écrite à l'aide des périodes (A_k, B_k) conserve la même forme; car les entiers caractéristiques ne changent pas par une substitution linéaire et, d'autre part, chacune des parenthèses telles que $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ est égale à la parenthèse correspondante $(A_1 B_2 - A_2 B_1)$ multipliée par le déterminant de la substitution.

On peut, d'après cela, pour vérifier (4) effectuer une substitution linéaire. Nous pouvons d'ailleurs supposer que l'une des parenthèses $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ est différente de zéro, car si elles sont toutes nulles, il n'y a pas lieu à démonstration.

Supposant donc que $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ est différent de zéro, déterminons la substitution linéaire suivante:

$$\begin{aligned} X &= l_1 x + n_1 y \\ Y &= l_2 x + n_2 y \end{aligned} \tag{7}$$

par les conditions

$$(8) \qquad 2i\pi = l_1 a_1 + n_1 b_1, \qquad 0 = l_1 a_2 + n_1 b_2,$$

$$(9) \qquad 0 = l_2 a_1 + n_2 b_1, \qquad 2i\pi = l_2 a_2 + n_2 b_2,$$

ce qui est évidemment possible; on aura $l_1 n_2 - l_2 n_1 \neq 0$.

Par cette substitution les quatre systèmes de périodes seront remplacés par les suivants: $(2i\pi, 0)$, $(0, 2i\pi)$, (A_3, B_3), (A_4, B_4) et $f(x, y)$ deviendra $F(X, Y)$. Il suffit de continuer la démonstration comme le fait M. Appell pour arriver à la relation suivante, sans aucune hypothèse restrictive relativement aux valeurs de A_3, B_3, A_4 et B_4:

$$(10) \quad 2m_{3,1}i\pi A_4 + 2m_{3,2}i\pi B_4 + 2m_{1,4}i\pi A_3 + 2m_{2,4}i\pi B_3 + m_{2,1}(A_3 B_4 - A_4 B_3) + 4\pi^2 m_{3,4} = 0.$$

On vérifie immédiatement que cette relation se réduit à la relation (4) écrite pour les systèmes de périodes $(2i\pi, 0)$, $(0, 2i\pi)$, (A_3, B_3), (A_4, B_4). La relation se trouve démontrée dans toute sa généralité. Remarquons que la relation (4) n'est une relation entre les quatre systèmes de périodes qu'autant que les six entiers ne sont pas tous nuls. Pour établir l'existence d'une relation entre les périodes pour le cas des fonctions abéliennes, il faut prouver que les entiers dans ce cas ne sont pas tous nuls. La démonstration que donne à ce sujet M. Appell ne s'étend pas au cas des fonctions de n variables $(n + 2)$-fois périodiques. Pour ce cas général nous avons donné une autre démonstration dans le Mémoire déjà cité; dans la suite de celui-ci nous en indiquons, incidemment, une autre fondée sur des considérations différentes.

3. Nous avons vu l'invariance des entiers caractéristiques dans une substitution linéaire. Nous allons étudier maintenant l'effet produit sur ces entiers par une transformation effectuée sur les périodes. Remarquons tout d'abord que si $m_{p,q}$ est l'entier relatif aux deux systèmes de périodes (a_p, b_p), (a_q, b_q), l'entier relatif aux deux systèmes (a_p, b_p), $(-a_q, -b_q)$ sera $-m_{p,q}$ comme on le voit sans peine. Considérons ensuite trois systèmes de périodes (a_p, b_p), (a_q, b_q), (a_r, b_r) quelconques, distincts ou non. Soient, conformément aux notations précédentes, $m_{p,q}$, $m_{p,r}$, $m_{q,r}$ les entiers caractéristiques relatifs à ces systèmes. Posons toujours comme plus haut

$$(11) \qquad f(x + a_k, y + b_k) = e^{g_k(x,y)} f(x, y), \qquad (k = p, q, r).$$

On a ensuite

$$
(12) \quad
\begin{aligned}
&g_p(x + a_r, y + b_r) - g_p(x, y) - [g_r(x + a_p, y + b_p) - g_r(x, y)] = 2\, i\pi\, m_{p,r} \\
&g_q(x + a_r, y + b_r) - g_q(x, y) - [g_r(x + a_q, y + b_q) - g_r(x, y)] = 2\, i\pi\, m_{q,r}.
\end{aligned}
$$

Cherchons l'entier caractéristique relatif aux systèmes de périodes $(a_p + a_q, b_p + b_q)$ et (a_r, b_r). Il est égal à l'expression suivante divisée par $2\, i\pi$:

$$
\begin{gathered}
g_p(x + a_q + a_r, y + b_q + b_r) + g_q(x + a_r, y + b_r) - g_p(x + a_q, y + b_q) - g_q(x, y) \\
- g_r(x + a_p + a_q, y + b_p + b_q) + g_r(x, y)
\end{gathered}
$$

qui, en vertu des relations (12) où l'on change dans la première x et y en $x + a_q$, $y + b_q$, se réduit à $2\, i\pi(m_{p,r} + m_{q,r})$.

L'entier caractéristique pour les deux systèmes $(a_p + a_q, b_p + b_q)$ et (a_r, b_r) est donc $m_{p,r} + m_{q,r}$.

Plus généralement, soient n systèmes de périodes (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots n)$ et posons

$$
(13) \quad
\begin{aligned}
A_1 &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \\
B_1 &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n
\end{aligned}
$$

les λ étant des entiers quelconques. Par l'application répétée des résultats précédents nous obtenons l'entier relatif à (A_1, B_1) et (a_p, b_p), (p ayant l'une des valeurs $1, 2, \ldots n$). En désignant par ν_p cet entier, nous avons ainsi:

$$
(14) \quad \nu_p = \lambda_1 m_{1,p} + \lambda_2 m_{2,p} + \cdots + \lambda_n m_{n,p}.
$$

Posons maintenant

$$
(15) \quad
\begin{aligned}
A_2 &= \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_n a_n \\
B_2 &= \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \cdots + \mu_n b_n
\end{aligned}
$$

et cherchons l'entier caractéristique $M_{2,1}$ relatif à (A_2, B_2) et (A_1, B_1); en appliquant la même règle on l'obtient par la formule suivante:

$$
M_{2,1} = -\mu_1 \nu_1 - \mu_2 \nu_2 - \mu_3 \nu_3 \cdots - \mu_n \nu_n
$$

et en remplaçant les ν par leurs valeurs (14)

$$
M_{2,1} = -\Sigma \mu_p \lambda_q m_{q,p} \qquad (p \text{ et } q = 1, 2, \ldots n)
$$

ce qui peut s'écrire aussi, en remarquant que $m_{q,p} = -m_{p,q}$ et $M_{2,1} = -M_{1,2}$:

$$
(16) \quad M_{1,2} = \Sigma m_{p,q}(\lambda_p \mu_q - \lambda_q \mu_p)
$$

la sommation s'étendant ici à toutes les combinaisons (p, q) des n premiers nom-

bres entiers deux à deux (car $m_{p,p} = 0$) et renfermant donc en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ termes.

Nous avons ainsi par la formule (16) l'expression des nouvelles valeurs des entiers caractéristiques après une transformation sur les périodes.

4. Comme application de cette formule considérons trois systèmes de périodes (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) et les entiers caractéristiques correspondants $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$. Nous allons montrer que l'on peut, par une transformation du *premier ordre* effectuée sur ces trois systèmes de périodes les remplacer par trois autres (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) pour lesquels les entiers caractéristiques seront $M_{1,2} = 0$ $M_{2,3} = d$ $M_{3,1} = 0$ où d est le plus grand commun diviseur (positif par exemple) des trois entiers $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$ supposés non tous nuls. Appelons en effet $m'_{1,2}$, $m'_{1,3}$, $m'_{2,3}$ les quotients respectifs de $m_{1,2}$, $m_{1,3}$, $m_{2,3}$ par leur plus grand commun diviseur d. Ces entiers étant premiers entre eux, nous pouvons choisir six entiers λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} m'_{2,3} & m'_{3,1} & m'_{1,2} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

soit égal à 1.

Posons alors

$$A_1 = m'_{2,3}a_1 + m'_{3,1}a_2 + m'_{1,2}a_3 \qquad A_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

$$B_1 = m'_{2,3}b_1 + m'_{3,1}b_2 + m'_{1,2}b_3 \qquad B_2 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$$

$$A_3 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3$$

$$B_3 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3$$

et calculons les entiers $M_{2,3}$, $M_{3,1}$, $M_{1,2}$ à l'aide de la formule (16) dont le second membre se réduira dans le cas actuel à un déterminant du troisième ordre. Pour $M_{2,3}$ nous aurons:

$$M_{2,3} = \begin{vmatrix} m_{2,3} & m_{3,1} & m_{1,2} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est évidemment égal à d et l'on a bien

$$M_{2,3} = d.$$

Les déterminants qui donnent $M_{3,1}$ et $M_{1,2}$ seront nuls comme ayant deux lignes proportionelles. Nous avons donc obtenu le résultat annoncé.

5. Comme autre application de la formule (16) nous allons indiquer, pour trois systèmes de périodes et les entiers correspondants, une expression qui possède des propriétés d'invariance d'une importance capitale pour la suite.

Les mêmes notations étant conservées, posons:

$$\delta_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad \delta_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad \delta_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

puis dans les formules suivantes, mettons en évidence les parties réelles et imaginaires de δ_1, δ_2 et δ_3:

$$\delta_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \delta_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \delta_3 = \alpha_3 + i\beta_3,$$

et posons:

$$(17) \qquad I = m_{1,2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + m_{2,3}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + m_{3,1}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3).$$

On peut vérifier par un calcul tout à fait élémentaire les deux propriétés suivantes de l'expression réelle I.

Si l'on effectue sur les variables x et y une substitution linéaire quelconque de déterminant D, si l'on calcule ensuite la nouvelle expression de I pour les trois systèmes de périodes correspondant, pour les nouvelles variables, aux trois anciens (les entiers m restant comme nous l'avons vu inaltérés) la nouvelle expression de I sera égale à l'ancienne multipliée par le carré du module de D, propriété qui s'exprime par l'égalité suivante:

$$I_1 = |D^2| I.$$

On en conclut que la quantité réelle I *conserve son signe dans une substitution linéaire.*

En second lieu, si l'on effectue sur les trois systèmes de périodes une transformation d'ordre n, on vérifie à l'aide de la formule (16), que l'expression de I, après cette transformation, se reproduit multipliée par n^2. Donc, par une transformation quelconque, le signe de I n'est pas altéré. Nous verrons plus loin que I est nécessairement *positif, non nul* lorsque les trois systèmes de périodes ne sont pas *exceptionnels,* et que la condition $I > 0$ est la seule condition pour qu'il existe une fonction entière dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes considérés avec les entiers caractéristiques correspondants $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$. Dans le paragraphe suivant nous précisons ce que nous entendons ici par *exceptionnels.* Nous indiquerons d'abord comment l'expression de I peut être

étendue au cas de n variables et de $(n+1)$ systèmes de périodes avec $\frac{n(n+1)}{2}$ entiers caractéristiques définis exactement comme dans le cas de deux variables.

Désignons par $(a_p^{(1)}, a_p^{(2)}, \dots a_p^{(n)})$ $(p = 1, 2, \dots, n+1)$ les $n+1$ systèmes de périodes conjuguées. A chacun de ces systèmes, imaginons que l'on ajoute un $(n+1)^{\text{iéme}}$ élément quelconque $a_p^{(n+1)}$ de façon à former un déterminant d'ordre $(n+1)$ dont la $p^{\text{ème}}$ ligne sera

$$a_p^{(1)},\ a_p^{(2)}, \dots a_p^{(n)},\ a_p^{(n+1)} \qquad (p = 1, 2, \dots n+1).$$

Soit alors δ_p, $(p = 1, 2, \dots n+1)$ le coefficient de $a_p^{(n+1)}$ dans le déterminant précédent, et mettons en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de δ_p; soit

$$\delta_p = \alpha_p + i\beta_p \qquad (p = 1, 2 \dots, n+1).$$

Nous définirons I par l'égalité

$$I = \Sigma m_{p,q}(\alpha_p\beta_q - \alpha_q\beta_p) \tag{18}$$

la sommation Σ s'étendant aux $\frac{n(n+1)}{2}$ combinaisons (p, q) des $(n+1)$ premiers nombres entiers deux à deux.

I ainsi défini possédera les deux propriétés d'invariance énoncées ci-dessus pour le cas de $n=2$. Son signe est donc invariable lorsqu'on effectue soit une substitution linéaire sur les variables, soit une transformation sur les périodes. Nous n'insistons pas sur ce cas général, car l'objet du présent Mémoire est l'étude du cas de deux variables. Mais les indications sommaires qui précèdent sur le cas de n variables, éclairciront dans la suite la nature de l'inégalité $I > 0$ que nous rencontrerons.

6. Revenons au cas de deux variables et de trois systèmes de périodes conjuguées, désignés par les mêmes notations que plus haut.

Ces trois systèmes de périodes seront exceptionnels s'ils satisfont à l'une ou à l'autre des deux conditions particulières suivantes:

1°. Il existe entre les trois déterminants du second ordre

$\delta_1 = a_2b_3 - a_3b_2$, $\delta_2 = a_3b_1 - a_1b_3$, $\delta_3 = a_1b_2 - a_2b_1$ une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls.

2°. Il existe deux relations simultanées de la forme:

$$(19)\qquad \begin{aligned} A a_1 + B a_2 + C a_3 = 0, \\ A b_1 + B b_2 + C b_3 = 0. \end{aligned}$$

A, B, C étant des constantes *réelles* non toutes nulles.

Il est clair que chacune des conditions (1°) et (2°) subsiste après une substitution linéaire ou une transformation.

Si les trois déterminants δ_1, δ_2, δ_3 sont nuls les trois systèmes de périodes sont proportionnels; laissons de côté ce cas très-facile à discuter, et supposons par exemple $\delta_1 \neq 0$. On pourra, dans ce cas, trouver quatre constantes l, m, l', m' telles que l'on ait:

$$\begin{aligned} la_1 + mb_1 &= 2\,i\pi \qquad & l'a_1 + m'b_1 &= 0 \\ la_2 + mb_2 &= 0 \qquad & l'a_2 + m'b_2 &= 2\,i\pi \end{aligned}$$

avec $lm' - l'm \neq 0$.

Si l'on effectue la substitution

$$\begin{aligned} x' &= lx + my \\ y' &= l'x + m'y \end{aligned}$$

les trois systèmes de périodes deviendront pour les variables x' et y': $(2\,i\pi, 0)$, $(0, 2\,i\pi)$, (a', b'). La condition (1°) serait alors une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers non tous nuls entre a', b' et $2\,i\pi$. Nous avons étudié ce cas dans le Mémoire cité. La condition (2°) serait pour les systèmes actuels de périodes que a' et b' soient tous deux purement imaginaires. Il est facile d'apercevoir les raisons pour lesquelles ce cas doit être écarté de l'étude des fonctions triplement périodiques.

7. On peut, d'après ce qui précède, ramener trois systèmes de périodes non exceptionnels par une simple substitution linéaire faite sur les variables, à la forme $(2\,i\pi, 0)$, $(0, 2\,i\pi)$, (a, b) où l'on a, en mettant en évidence les parties réelles et les parties imaginaires de a et b:

$$a = \lambda_1 + \mu_1 i, \qquad b = \lambda_2 + \mu_2 i$$

l'une des deux quantités λ_1 ou λ_2 étant nécessairement différente de zéro. De plus il n'y a aucune relation linéaire homogène, à coefficients entiers non tous nuls entre a, b et $2\,i\pi$.

On a ainsi une forme normale pour trois systèmes de périodes non exceptionnels. C'est celle qui a été employée par presque tous les auteurs pour la

théorie des fonctions abéliennes. Nous allons en donner une autre que nous avons déjà employée dans le Mémoire cité et qui nous semble beaucoup plus propre à mettre en évidence les propriétés des fonctions triplement périodiques: nous l'utiliserons presque constamment dans ce qui suivra.

Supposons pour fixer les idées $\lambda_1 \neq 0$ et effectuons la substitution linéaire

$$X = \frac{2i\pi}{\lambda_1}x, \qquad Y = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x + y;$$

les trois nouveaux systèmes de périodes seront (en changeant l'ordre), $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ en posant:

$$\omega = -\frac{4\pi^2}{\lambda_1}, \qquad \beta = -2\pi\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

$$\omega' = 2i\pi - 2\pi\frac{\mu_1}{\lambda_1}, \qquad \beta' = \frac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\lambda_1}.$$

On voit que β et β' sont *tous deux réels* et que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire.

On a ici:

$$\delta_1 = i(\beta'\omega - \beta\omega'), \quad \delta_2 = 2i\pi\omega', \quad \delta_3 = -2i\pi\omega.$$

Pour qu'il y ait entre δ_1, δ_2 et δ_3 une relation linéaire, homogène, à coefficients entiers ϱ_1, ϱ_2 et ϱ_3 non tous nuls il faudrait que l'on eut:

$$\varrho_1(\beta'\omega - \beta\omega') + 2\varrho_2\pi\omega' - 2\varrho_3\pi\omega = 0$$

c'est-à-dire:

$$\omega(\varrho_1\beta' - 2\pi\varrho_3) + \omega'(2\varrho_2\pi - \varrho_1\beta) = 0$$

et comme $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire et que β et β' sont réels cela entraîne les deux conditions:

$$\varrho_1\beta' - 2\pi\varrho_3 = 0$$

$$\varrho_1\beta - 2\pi\varrho_2 = 0$$

ce qui n'aura lieu que si β et β' sont tous deux commensurables avec π.

Réciproquement, les trois systèmes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ où β et β' sont réels et ω, ω' quelconques mais à rapport imaginaire ne seront pas *exceptionnels* si β et β' ne sont pas tous deux commensurables avec π (ou nuls comme cas plus particulier).

Il peut arriver que dans la forme normale que nous venons d'indiquer, il y ait entre β, β' et 2π *une* relation linéaire homogène à coefficients entiers non

tous nuls, sans que pour cela les trois systèmes soient exceptionnels: c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si l'un des deux nombres β ou β' était commensurable avec π. Un tel cas particulier n'est pas exclu par ce qui précède.

Première Partie.

8. Avant d'aborder l'étude de quelques propriétés des zéros des fonctions triplement périodiques, nous donnerons, pour une fonction régulière de trois variables complexes un théorème qui est un corollaire d'un théorème classique de Weierstrass. Nous désignons par $f(x, y, z)$ une fonction des trois variables complexes x, y, z régulière pour un domaine D limité par trois contours fermés simples (C_1, C_2, C_3) tracés respectivement sur chacun des trois plans représentatifs des variables. Nous comprenons dans ce domaine tous les points *situés sur ses frontières*. En outre nous supposons qu'il n'existe aucun couple de valeurs de y et de z appartenant au domaine (C_2, C_3) pour lequel $f(x, y, z)$ soit nulle qu'elle que soit la valeur de x. Dans ces conditions pour un point quelconque (x_1, y_1, z_1) du domaine D, il existe un polynôme de Weierstrass $P_1(x)$ entier en $x-x_1$ qui a les propriétés suivantes: 1° Le coefficient du terme du plus haut degré en $x-x_1$ est l'unité; 2° Il existe un nombre positif ϱ_1 tel que pour le domaine δ_1 défini par $|x-x_1|<\varrho_1$, $|y-y_1|<\varrho_1$, $|z-z_1|<\varrho_1$ tous les coefficients du polynôme sont des fonctions régulières de y et z et tel en outre qu'à l'intérieur de δ_1 les équations $f(x, y, z)=0$ et $P_1(x)=0$ sont équivalentes; 3° Tous les coefficients du polynôme $P_1(x)$ ordonné suivant les puissances de $(x-x_1)$ (à part celui qui est égal à l'unité) s'annulent pour $y=y_1$, $z=z_1$.

Remarquons que si au point considéré $f(x, y, z)$ ne s'annule pas, on a $P_1(x)\equiv 1$.

Nous ferons la remarque suivante, bien qu'elle soit évidente, pour mieux faire comprendre ce qui suit.

Supposons que les racines du polynôme $P_1(x)$ s'échangent entre elles dans le voisinage de $y=y_1$, $z=z_1$. Si nous prenons un système de valeurs (y_2, z_2) *non particulières* et *très-voisines* de (y_1, z_1) le polynôme $P_1(x)$ admet pour $y=y_2$, $z=z_2$ une racine $x=x_2$ très-voisine de x_1 et, en général, racine simple de $P_1(x)$. Au point (x_2, y_2, z_2) correspondra alors un polynôme de Weierstrass $P_2(x)$ qui sera du premier degré et pour lequel le nombre positif correspondant ϱ_2 sera très-petit puisqu'il sera au plus égal à la plus grande des quantités $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$. Mais si nous ordonnons le polynôme $P_1(x)$ suivant les puissances de

$(x - x_2)$ nous obtiendrons un polynôme $Q(x)$ qui aura, relativement au point (x_2, y_2, z_2) toutes les propriétés du polynôme de WEIERSTRASS, *à part la troisième*. D'une façon plus précise si nous appelons ε le plus grand des modules $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$, $|z_2 - z_1|$ nous voyons que: 1° le polynôme $Q(x)$ a pour coefficient de son terme du plus haut degré l'unité. 2° Pour le domaine $|x - x_2| < \varrho_1 - \varepsilon$, $|y - y_2| < \varrho_1 - \varepsilon$, $|z - z_2| < \varrho_1 - \varepsilon$ les coefficients de $Q(x)$ sont des fonctions régulières de y et z et de plus l'équation $Q(x) = 0$ est équivalente à $f(x, y, z) = 0$. Nous appellerons *polynôme normal* relatif au point (x_2, y_2, z_2) tout polynôme possédant les deux propriétés précédentes pour un domaine déterminé du point x_2, y_2, z_2. Il est clair qu'au point x_2, y_2, z_2 correspondent une infinité de polynômes normaux.

Si l'on compare le polynôme $Q(x)$ au polynôme de WEIERSTRASS $P_2(x)$ relatif au point (x_2, y_2, z_2), on voit que le rayon ϱ_2 du domaine pour lequel $P_2(x)$ est valable, est au plus égal à ε qui est très-petit, tandisque le rayon du domaine pour lequel $Q(x)$ est valable étant $\varrho_1 - \varepsilon$ est très-voisin de ϱ_1.

Cette remarque faite, démontrons le théorème suivant où $f(x, y, z)$ reste soumise aux mêmes hypothèses que ci-dessus. Il existe un nombre positif r tel que, quel que soit le point x_0, y_0, z_0 pris dans le domaine D, il lui correspond un *polynôme normal* $Q_0(x)$ valable pour le domaine $|x - x_0| < r$, $|y - y_0| < r$, $|z - z_0| < r$.

(Il est clair que cet énoncé serait faux en général si l'on remplaçait le mot *polynôme normal* par polynôme de WEIERSTRASS.)

Supposons que le théorème précédent ne soit pas vrai et prenons une suite de nombres positifs décroissants et tendant vers zéro; soit

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \dots \ \varepsilon_n, \dots$$

cette suite. Le théorème énoncé n'étant pas vrai, nous pouvons prendre un point (x_n, y_n, z_n) dans le domaine D tel qu'à ce point ne corresponde aucun polynôme normal valable dans le domaine

$$|x - x_n| < \varepsilon_n, \quad |y - y_n| < \varepsilon_n, \quad |z - z_n| < \varepsilon_n,$$

ε_n étant un terme choisi dans la suite précédente. Supposons que l'on prenne successivement $n = 1, 2, \dots + \infty$. On aura un ensemble infini dénombrable de points (x_n, y_n, z_n) appartenant tous au domaine D. Il existera un point limite de cet ensemble (a, b, c) qui appartiendra à D (puisque D comprend ses frontières). A ce point (a, b, c) correspond un polynôme de WEIERSTRASS valable pour un petit domaine de rayon ϱ autour de ce point. Si l'on considère le domaine $\frac{\varrho}{2}$ du point (a, b, c) et un point quelconque (a', b', c') de ce domaine,

il correspond à (a', b', c') un *polynôme normal* convenablement choisi, comme nous l'avons vu plus haut, qui sera valable pour un domaine de rayon $\frac{\varrho}{2}$ autour de (a', b', c'). La contradiction avec ce qui précède est évidente. Le théorème énoncé est donc vrai.

9. Prenons maintenant une fonction méromorphe $\dfrac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ triplement périodique les trois systèmes de périodes *non exceptionnels* étant sous la forme normale $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$; $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ sont deux fonctions entières sans *facteur commun*.

Nous allons étudier les zéros de l'équation

$$\frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)} - u = 0. \tag{1}$$

u étant une valeur donnée arbitrairement; l'équation précédente s'écrira:

$$g_1(x, y) - u g_2(x, y) = 0. \tag{2}$$

Appelons C_1 un parallélogramme du plan de la variable x construit avec ω et ω' pour côtés.

Mettons en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de y en posant:

$$y = \xi + i\eta;$$

puis considérons le rectangle du plan de la variable y défini par:

$$\begin{cases} a \leq \xi \leq b \\ c \leq \eta \leq c + 2\pi \end{cases} \tag{3}$$

où a, b, c sont trois valeurs réelles arbitraires $(a < b)$. Soit C_2 ce rectangle.

Enfin, soit C_3 un contour fermé simple quelconque du plan de la variable u, par exemple un cercle pour fixer les idées.

Il n'y a aucun système de valeurs de y et u pour lequel la différence $g_1(x, y) - u g_2(x, y)$ soit nulle identiquement quelle que soit x. Car si cette circonstance se présentait pour un système de valeurs (y_0, u_0), elle se présenterait aussi, par suite de la triple périodicité, pour les systèmes de valeurs $(y_0 + m i\beta + n i\beta' + 2 p i\pi, u_0)$ m, n et p étant trois entiers quelconques.

Mais les valeurs de $m\beta + n\beta' + 2p\pi$ forment un ensemble qui admet, pour valeur limite, toute valeur réelle lorsque l'on suppose que β et β' ne sont pas tous deux commensurables avec π, ce qui est le cas. Donc k étant un nombre réel quelconque on aurait:

$$\frac{g_1(x, y_0 + ik)}{g_2(x, y_0 + ik)} = u_0$$

pour toutes les valeurs de x et les valeurs réelles de k. On aurait par suite

$$\frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)} = u_0$$

pour toutes les valeurs de x et y (voir à ce sujet notre Mémoire cité pages 32 et 33). La fonction considérée serait donc une constante.

Remarquons qu'il peut au contraire exister des systèmes de valeurs de x et u pour lesquels l'équation (2) soit satisfaite quelle que soit y. Si nous appelons (x'_0, u'_0) un tel système de valeurs, la même circonstance se présentera pour les systèmes de valeurs $(x_0 + m\omega + n\omega', u_0)$ ce qui montre que la différence

$$g_1(x, y) - u_0 g_2(x, y)$$

contiendrait en facteur une fonction Θ de la seule variable x, ce qui évidemment peut avoir lieu. Nous pouvons appliquer maintenant le théorème du paragraphe précédent à la fonction des trois variables x, y, u

$$g_1(x, y) - u g_2(x, y)$$

dans le domaine (C_1, C_2, C_3) (parallélogramme, rectangle, cercle) défini ci-dessus: il existe un nombre positif r tel qu'à tout point de ce domaine correspond un polynôme normal entier en x valable pour un domaine de rayon r autour du point considéré.

Considérons maintenant pour les variables x, y, u un domaine $\varDelta$ comprenant: pour x tout le plan de cette variable (excepté $x = \infty$); pour y toute la bande parallèle à l'axe des η et définie par

$$a < \xi < b$$

(le point $y = \infty$ excepté); enfin pour u le même cercle C_3 que précédemment.

Il résulte immédiatement de la triple périodicité de la fonction $\dfrac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ que le théorème précédent s'applique à tout le domaine $\varDelta$. En effet, soit (x_1, y_1, u_1) un point quelconque du domaine $\varDelta$; parmi les points $(x_1 + m\omega + n\omega', y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi)$, ($m$, n et p entiers quelconques) il y en a un qui appartient au domaine (C_1, C_2, C_3); car m et n peuvent être choisis de façon que le point $x_1 + m\omega + n\omega'$ appartienne au parallélogramme C_1 et ensuite on peut choisir p de façon que la partie imaginaire de $y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi$ appartienne à l'intervalle c à $c + 2\pi$ des inégalités (3). Si nous posons alors

$$x_2 = x_1 + m\omega + n\omega', \qquad y_2 = y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi$$

au point (x_2, y_2, u_1) du domaine (C_1, C_2, C_3) correspond un polynôme normal valable pour un domaine de rayon r autour de x_2, y_2, u_1. En remplaçant dans ce polynôme x et y respectivement par $x + m\omega + n\omega'$ et $y + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi$ il deviendra un polynôme normal relatif au point (x_1, y_1, u_1) et valable pour un domaine de rayon r autour de ce point: cela résulte de la triple périodicité de $\frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$. Le rayon r est, d'après ce qui précède, le même pour tous les points de $\varDelta$.

Remarquons maintenant que si dans l'équation (1) on pose $u' = \frac{1}{u}$ et qu'on renverse le rapport du premier membre, l'équation conserve la même forme. Donc, ce que nous avons dit précédemment pour une valeur finie u_1 de u, s'appliquera encore ici pour $u = \infty$, en changeant comme d'habitude $u - u_1$ en $\frac{1}{u}$ et en appelant domaine de rayon r du point u celui qui est défini par l'inégalité

$$\left|\frac{1}{u}\right| < r$$

Ces conventions et remarques faites, on voit par un raisonnement bien simple, que l'on peut prendre pour C_3, dans l'étude actuelle, tout le plan de la variable u sans même en excepter le point $u = \infty$.

En résumé: il existe un nombre positif r qui convient pour tous les points du domaine formé par: tout le plan de la variable x ($x = \infty$ excepté); toute la bande du plan de y définie par $a \leq \xi \leq b$ ($y = \infty$ excepté); tout le plan de la variable u, le point à l'infini *compris*.

Il résulte de là la conséquence suivante: si dans l'équation (1) on considère x comme fonction des deux variables indépendantes y et u, jamais x ne devient *infinie* et cette fonction n'a d'autres singularités que des singularités de nature algébrique (sauf pour $y = \infty$). En effet, (y_1, u_1) étant un système quelconque de valeurs de y et u du domaine défini ci-dessus recherchons si ce couple de valeurs peut être une singularité pour l'une quelconque des déterminations de x et de quelle nature peut être cette singularité. Appelons δ le domaine de rayon r autour du point (y_1, u_1); prenons un système de valeurs quelconques (y_2, u_2) dans le domaine δ et désignons par x_2 l'une quelconque des déterminations de x pour $y = y_2$, $u = u_2$. Cette détermination est racine d'un polynôme normal $Q(x)$ relatif au point (x_2, y_2, u_2) et valable dans le domaine r de ce point; or le point (y_1, u_1) appartient au domaine r du point (y_2, u_2); donc comme les

coefficients de $Q(x)$ sont des fonctions régulières de y et u dans ce domaine et que le coefficient du terme du plus haut degré en x est l'unité, on voit qu'aucune racine de ce polynôme ne devient infinie pour $y = y_1$, $u = u_1$. Quant à la nature de la singularité possible pour $y = y_1$, $u = u_1$, elle est par ce qui précède, évidente. Comme pour la bande du plan des y

$$a \leq \xi \leq b$$

a et b sont arbitraires, on voit que *la dernière* conclusion que nous venons d'énoncer est vraie pour toute valeur finie y_1 et nous pouvons dire que x *ne devient jamais infinie pour aucune valeur de y finie et de u finie ou infinie; les diverses déterminations de x ne peuvent admettre de singularités essentielles que pour y infinie.*

Il est à peine besoin de faire remarquer que la fonction $\dfrac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ peut, comme cas particulier, se réduire à une fonction de x tout seul: c'est alors une fonction elliptique de x aux périodes ω et ω' et la proposition précédente se réduit à la proposition classique que x est une fonction de u (intégrale abélienne de 1ère espèce) qui ne devient jamais infinie même pour $u = \infty$ et qui n'admet que des singularités algébriques.

10. Si dans l'équation (I) nous donnons à x et y un système de valeurs non particulières x_1 et y_1 il en résultera pour u une valeur bien déterminée u_1. Si l'on choisit alors pour $y = y_1$, $u = u_1$ la détermination de x qui est égale à x_1 et si l'on suppose que y et u varient d'une façon continue à partir des valeurs y_1 et u_1, x variera d'après ce qui précède d'une façon continue quelle que soit la suite de valeurs attribuées à y et u. Il pourra y avoir ambiguité sur la continuation de x, si y et u prennent quelque système de valeurs pour lequel il y a ramification, mais il est clair qu'on aura par continuité constamment *au moins une* valeur de x correspondant à n'importe quel système de valeurs de y et u (y finie). Donc l'équation (I) admet en x au moins une racine, pour tout système de valeurs $y = y_2$, $u = u_2$. Le seul cas d'exception serait donc celui que notre raisonnement a écarté dès le début pour lequel la fonction $\dfrac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ serait une constante.

11. Nous pouvons compléter notre dernier résultat de la façon suivante: *étant donné un système de valeurs quelconques $y = y_2$, $u = u_2$, il existe un nombre entier positif q tel que si l'on construit dans le plan de la variable x un réseau de parallélogrammes de côtés $q\omega$, $q\omega'$ l'équation* (I) *aura au moins une racine dans chacun des parallélogrammes du réseau.*

En effet, soit $x = x_2$ une racine de l'équation (I) pour $y = y_2$, $u = u_2$. Prenons la bande

$$a \leq \xi \leq b$$

de telle sorte qu'elle contienne la valeur y_2 de l'énoncé et supposons que y décrive le segment rectiligne qui joint le point y_2 au point $y_2 + 2i\pi$, u restant constant et égal à u_2. Dans l'équation (1) x est alors fonction de y seulement, et si l'on suppose que x part de la valeur x_2 pour $y = y_2$, on pourra suivre par continuité la valeur de x jusqu'à une valeur x_3 pour $y = y_2 + 2i\pi$; il peut y avoir ambiguité dans cette continuation pour certaines valeurs de y qui sont des points de ramification pour la branche de fonction choisie; ces points d'ambiguité seront en nombre fini puisque chaque polynôme normal peut être choisi de façon à être valable pour un domaine de rayon r le même pour tous les points du domaine considéré actuellement. En choisissant, pour chaque point d'ambiguité, arbitrairement la détermination de continuation, la variable x décrira une ligne déterminée (Γ) dans son plan, lorsque y parcourra le segment rectiligne y_2 à $y_2 + 2i\pi$ dans le sens positif. Comme x est une fonction continue, jamais infinie, de y, la ligne Γ est tout entière dans une portion finie du plan de x. Nous pouvons donc prendre l'entier positif q assez grand pour que la ligne Γ soit tout entière à l'intérieur d'un parallélogramme $P_{0,0}$ convenablement choisi de côtés $q\omega$, $q\omega'$. (Notons que Γ peut se réduire à un point si x est constant lorsque y varie: cela n'infirme en rien nos raisonnements). Ceci posé, m et n désignant deux entiers quelconques positifs, negatifs ou nuls, on peut évidemment choisir l'entier p de façon que l'on ait:

$$0 \leq mq\beta + nq\beta' + 2p\pi < 2\pi$$

La valeur

$$y_4 = y_2 + mqi\beta + nqi\beta' + 2pi\pi$$

sera alors un point du segment $(y_2,\ y_2 + 2i\pi)$; il lui correspondra donc une valeur de x, $x = x_4$, sur Γ, c'est-à-dire à l'intérieur de $P_{0,0}$. Mais alors le point $x_{m,n} = x_4 - mq\omega - nq\omega'$, $y = y_2$, $u = u_2$ par suite de la triple périodicité supposée, vérifie l'équation (1). Or $x_{m,n}$ est à l'intérieur du parallélogramme qui se déduit de $P_{0,0}$ par la translation $(-mq\omega,\ -nq\omega')$. Comme m et n sont arbitraires le théorème énoncé se trouve démontré.

12. Lorsqu'on donne dans l'équation (1) à y une valeur constante y_0, x se trouve définie comme une fonction de la seul variable u. Cette fonction a, d'après le paragraphe précédent une infinité de déterminations (qui peuvent toutes s'échanger entre elles) et chacune de ces déterminations est une fonction continue de u, ne devenant jamais infinie, même pour $u = \infty$ et n'admettant, comme singularités que des ramifications algébriques.

Si l'on donne, au contraire, à u une valeur constante u_0 et que y varie, l'équation (1) définit x comme une fonction de y seul. Nous allons établir dans les paragraphes suivants quelques propriétés de cette fonction: nous ne particulariserons pas la question en supposant $u_0 = 0$, l'équation qui lie x à y étant alors:

$$g_1(x, y) = 0, \tag{4}$$

où $g_1(x, y)$ est une fonction entière dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$.

Remarquons que nous pouvons supposer que dans l'équation (4) $g_1(x, y)$ est une fonction entière *quelconque* dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes; ce que nous avons dit plus haut pour l'équation (2) s'appliquera (en supposant $u = 0$) à l'équation (4) *pourvu toutefois que* $g_1(x, y)$ *s'annule* pour quelque système de valeurs (x_1, y_1) de x et de y. Car alors en partant du système de valeurs (x_1, y_1), comme plus haut du système de valeurs (x_1, y_1, u_1) tous les mêmes raisonnements seront applicables; en particulier le théorème du paragraphe 11, en supposant $u_2 = 0$, sera vrai pour l'équation (4).

Ceci posé, si nous considérons la multiplicité à deux dimensions réelles des zéros de l'équation (4), les points de cette multiplicité pour lesquels il peut y avoir ramification de x considérée comme fonction de y sont des points isolés dans la représentation des variables x et y dans l'hyperespace à quatre dimensions. Par conséquent dans un domaine d'étendue finie de cet hyperespace il n'y aura qu'un nombre fini de tels points exceptionnels. Si nous reprenons maintenant la représentation de x et de y sur deux plans et que nous considérions à nouveau le domaine (C_1, C_2) (parallélogramme et rectangle de hauteur 2π) envisagé plus haut, nous voyons que, dans ce domaine, il n'y a qu'un nombre fini N de systèmes de valeurs (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots N)$ pour x et y correspondant à des ramifications de x.

Par chacun des N points y_n du rectangle C_2, menons une parallèle D_n à l'axe des imaginaires. Nous divisons ainsi la bande $a < \xi \leq b$ en un nombre déterminé de bandes indéfinies analogues mais plus petites. Montrons qu'à l'intérieur de chacune d'elles (frontières exclues) il n'y a aucun point $y = y'$ pour lequel l'une quelconque des déterminations de x puisse admettre une ramification. En effet, soit x' l'une quelconque des déterminations de x pour $y = y'$; on pourra prendre les entiers m, n et p (comme plus haut) de telle sorte que le point (x'_1, y'_1) défini par

$$x'_1 = x' + m\omega + n\omega', \qquad y'_1 = y' + mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi$$

appartienne au domaine (C_1, C_2). Mais si il y avait ramification pour $x = x'$, $y = y'$, il y aurait aussi ramification, par suite de la triple périodicité, pour $x = x_1'$, $y = y'_1$. Le point y'_1 serait donc l'un des N points y_n; mais cela est impossible puisque y' n'est pas sur l'une des parallèles D_n.

D'autre part, le point y_n correspondant à une ramification de la branche $x = x_n$, le point $y_n + m' i\beta + n' i\beta' + 2 p' i\pi$ (m', n' et p étant trois entiers quelconques) correspondra à une ramification pour la branche $x = x_n + m'\omega + n'\omega'$. Or on sait que β et β' n'étant pas tous deux commensurable avec π, la quantité $m'\beta + n'\beta' + 2 p'\pi$ pourra être aussi voisine que l'on voudra de toute quantité réelle donnée, pour un choix convenable des trois entiers. Donc les points $y_n + m' i\beta + n' i\beta' + 2 p' i\pi$ forment un ensemble admettant pour points limites tous les points de la droite D_n. Donc si, comme cela est évident, pour chaque branche de la fonction x les valeurs de ramification pour y sont isolées, pour l'ensemble de toutes les déterminations de x ces valeurs admettent comme points limites tous les points des droites D_n: nous appellerons ces droites *les droites des ramifications*. On voit par ce qui précède que tout le plan de la variable y se trouve subdivisé par les droites de ramifications en bandes parallèles à l'axe des imaginaires telles qu'à l'intérieur de chacune d'elles, chacune des déterminations de x est une fonction *uniforme et régulière* de y. Cela se déduit de ce qui précède par un raisonnement bien connu. En outre, entre deux parallèles quelconques à l'axe des imaginaires $\xi = a$, $\xi = b$, il n'y a qu'un nombre limité de droites de ramifications.

13. Pour établir certaines propriétés des zéros de $g_1(x, y)$ nous supposerons, ce qui ne restreint pas la généralité (voir Note I à la fin du Mémoire) que la fonction $g_1(x, y)$ satisfait aux identités suivantes:

$$(5)\qquad \begin{cases} g_1(x, y + 2 i\pi) = g_1(x, y) \\ g_1(x + \omega, y + i\beta) = e^{\varphi(y) + m_{2,1} y}\, g_1(x, y) \\ g_1(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) + i A x + m_{3,1} y}\, g_1(x, y) \end{cases}$$

dans lesquelles $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont deux fonctions entières de la seule variable y, admettant l'une et l'autre la période $2 i\pi$, et satisfaisont en outre à l'identité

$$(6)\qquad \psi(y + i\beta) - \psi(y) = \varphi(y + i\beta') - \varphi(y);$$

en outre A est une constante dont la valeur est la suivante

$$(7)\qquad A = \frac{m_{1,3}\,\beta + m_{2,1}\,\beta' + 2 m_{3,2}\,\pi}{\omega},$$

$m_{1,3}$, $m_{2,1}$, $m_{3,2}$ sont les entiers caractéristiques relatifs aux trois systèmes de périodes pris dans l'ordre $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Prenons dans le plan de la variable y un segment rectiligne ayant pour origine un point arbitraire y_0 et pour extremité le point $y_0 + 2i\pi$. Lorsque y parcourt ce segment de y_0 à $y_0 + 2i\pi$ les différentes déterminations de x dans l'équation (4) décrivent dans le plan représentatif de x certaines courbes. Choisissons dans ce plan un segment rectiligne d'origine x_0 et d'extrémité $x_0 + \omega$ de telle sorte que x_0 et $x_0 + \omega$ ne soient pas situés sur les courbes décrites par les différentes déterminations de x.

Posons

$$F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Log} g_1(x, y)$$

et considérons l'intégrale, prise le long du segment rectiligne $(x_0, x_0 + \omega)$,

$$\int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x, y)dx = \operatorname{Log} \frac{g_1(x_0 + \omega, y)}{g_1(x_0, y)}, \tag{8}$$

dans laquelle nous donnons tout d'abord à y la valeur y_0 et nous prenons pour le second membre la détermination qui convient pour $\operatorname{Log} \frac{g_1(x_0 + \omega, y_0)}{g_1(x_0, y_0)}$.

Nous supposerons ensuite que y varie en se déplaçant sur le segment rectiligne $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ toujours dans le sens de y_0 vers $y_0 + 2i\pi$. Remarquons que $g_1(x_0, y)$ et $g_1(x_0 + \omega, y)$ ne s'annulent pas, d'après l'hypothèse faite, dans cette variation de y. Nous pouvons donc définir une fonction $X(y)$ uniforme sur le segment $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ par l'égalité:

$$X(y) = \operatorname{Log} \frac{g_1(x_0 + \omega, y)}{g_1(x_0, y)}, \tag{9}$$

$X(y_0)$ ayant une valeur égale à celle de l'intégrale (8) pour $y = y_0$.

L'intégrale précédente est fonction continue de y tant que l'une des valeurs de x qui annulent $g_1(x, y)$ ne traverse pas le chemin d'intégration. Lorsqu'une telle valeur traverse le segment $(x_0, x_0 + \omega)$ dans le *sens direct* [sens de la direction obtenue en faisant tourner de $+\frac{\pi}{2}$ le segment $(x_0, x_0 + \omega)$] l'intégrale augmente de $2i\pi$; elle diminue de $2i\pi$ lorsque la traversée a lieu en sens inverse. Il en résulte que la détermination du second membre de (8) doit être augmentée ou diminuée de $2i\pi$ dans les mêmes conditions. La valeur de l'intégrale (8) pour $y = y_0 + 2i\pi$ sera donc égale à:

$$X(y_0+2i\pi)+2ni\pi,$$

où n est la différence algébrique entre le nombre des racines de $g_1(x, y)$ qui ont traversé dans le sens direct et le nombre de celles qui ont traversé dans le sens indirect.

Nous aurons d'après cela:

$$\int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x,\ y_0+2i\pi)\,dx - \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x,\ y_0)\,dx = X(y_0+2i\pi)+2ni\pi - X(y_0).$$

Mais d'après les identités (5)

$$F(x,\ y_0+2i\pi)=F(x,\ y_0)$$

et par suite

(10) $$2ni\pi = X(y_0)-X(y_0+2i\pi).$$

D'après la première des identités (5), $g_1(x,\ y)$ est fonction uniforme de x et de e^y; lorsque y parcourt le segment $(y_0,\ y_0+2i\pi)$ la valeur de e^y décrit dans le sens direct un cercle Γ de rayon égal au module de e^{y_0} et la variation totale de l'argument de $g_1(x_0+\omega,\ y)$ est un multiple entier de 2π; ce multiple restera évidemment le même si e^y fait le tour de Γ dans le sens direct en partant d'un autre point de Γ que précédemment. Cela revient à dire que si k désigne un nombre réel quelconque les variations totales des arguments de $g_1(x_0+\omega,\ y)$ et de $g_1(x_0+\omega,\ y+ik)$ seront les mêmes lorsque y décrira le segment rectiligne $(y_0,\ y_0+2i\pi)$ dans le sens direct. La différence

$$\frac{1}{i}\left[X(y_0+2i\pi)-X(y_0)\right]$$

est d'après (9) la variation totale de l'argument de $\dfrac{g_1(x_0+\omega,\ y)}{g_1(x_0,\ y)}$ lorsque y parcourt le segment $(y_0,\ y_0+2i\pi)$; elle est donc aussi égale à la variation totale de l'argument de

$$\frac{g_1(x_0+\omega,\ y+i\beta)}{g_1(x_0,\ y)},$$

fraction qui est égale d'après (5) à $e^{\varphi(y)+m_{2,1}y}$.

La variation de l'argument est donc $2\pi m_{2,1}$ et d'après (10) on aura en tenant compte de ce que $m_{2,1}=-m_{1,2}$:

$$n = m_{1,2}.$$

Donc *l'entier caractéristique* $m_{1,2}$ *est égal à la différence algébrique entre le nombre des traversées par les racines de l'équation* (4) *du segment* $(x_0, x_0+\omega)$ *dans le sens direct et le nombre des traversées dans le sens indirect, lorsque* y *parcourt le segment* $(y_0, y_0+2i\pi)$ *de* y_0 *à* $y_0+2i\pi$.

D'une façon tout analogue, l'entier $m_{1,3}$ a la même signification relativement à un segment $(x_0, x_0+\omega')$.

14. L'intégrale du premier membre de (8) nous servira encore à établir une propriété très importante des zéros de l'équation (1).

Remarquons tout d'abord que la partie imaginaire de cette intégrale a un sens bien déterminé et une valeur finie pour chaque valeur de y appartenant au segment $(y_0, y_0+2i\pi)$ même si une racine x de l'équation (4) est sur le segment $(x_0, x_0+\omega)$. La partie imaginaire de l'intégrale (8) ne diffère que par des multiples de π de la partie imaginaire de $X(y)$ laquelle est continue sur tout le segment $(y_0, y_0+2i\pi)$. Ces multiples de π proviennent des traversés du segment $(x_0, x_0+\omega)$ par les racines de l'équation (4). Ce nombre de traversées étant évidemment fini lorsque y parcourt le segment $(y_0, y_0+2i\pi)$ dans le sens de y_0 à $y_0+2i\pi$, il en résulte que: x_0 *et* y_0 *étant donnés, il existe un nombre positif* B *tel que la partie imaginaire de l'intégrale* (8) *a un module inférieur à* B pour toute valeur de y appartenant au segment $(y_0, y_0+2i\pi)$ et, par suite, pour toute valeur de y appartenant à la droite indéfinie qui joint les points y_0 et $y_0+2i\pi$ puisque $F(x, y)$ admet la période $2i\pi$ relativement à la variable y.

Ceci posé, prenons dans le plan de la variable x un parallélogramme $P_{p,q}$ construit sur les deux segments $(x_0, x_0+p\omega)$ et $(x_0, x_0+q\omega')$ p et q étant deux entiers positifs pour fixer les idées. Nous pouvons supposer, le point x_0 n'étant pas choisi de façon particulière, qu'aucune des racines de

$$g_1(x, y_0) = 0.$$

n'est située sur le périmètre de $P_{p,q}$.

Dans ces conditions, le nombre $N_{p,q}$ des zéros de $g_1(x, y_0)$ intérieurs au parallélogramme $P_{p,q}$ est donné par:

$$2i\pi N_{p,q} = \int F(x, y_0)\,dx$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct tout le long du périmètre de $P_{p,q}$.

Posons:

$$S_1 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0+m\omega}^{x_0+(m+1)\omega} F(x, y_0)\,dx,$$

$$S_2 = \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0+m\omega'}^{x_0+(m+1)\omega'} F(x,\, y_0)\,dx,$$

$$S_3 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0+q\omega'+m\omega}^{x_0+q\omega'+(m+1)\omega} F(x,\, y_0)\,dx,$$

$$S_4 = \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0+p\omega+m\omega'}^{x_0+p\omega+(m+1)\omega'} F(x,\, y_0)\,dx;$$

chacun des chemins d'intégration est un *segment rectiligne* qui appartient au périmètre de $P_{p,q}$ et l'ensemble de ces chemins comprend tout le périmètre du parallélogramme, de telle sorte que l'on a:

$$2i\pi N_{p,q} = \pm (S_1 - S_2 + S_4 - S_3) \tag{11}$$

le signe à prendre devant la parenthèse est celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

Les expressions de S_1, S_2, S_3 et S_4 peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$S_1 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x + m\omega,\, y_0)\,dx,$$

$$S_2 = \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega'} F(x + m\omega',\, y_0)\,dx,$$

$$S_3 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x + q\omega' + m\omega,\, y_0)\,dx,$$

$$S_4 = \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega'} F(x + p\omega + m\omega',\, y_0)\,dx.$$

Des identités (5) on conclut immédiatement les suivantes, où m est un entier quelconque:

$$F(x + m\omega,\, y) = F(x,\, y - mi\beta),$$

$$F(x + m\omega',\, y) = miA + F(x,\, y - mi\beta').$$

A l'aide de ces formules on peut transformer les expressions précédentes de S_1, S_2, S_3, S_4 en les suivantes:

$$S_1 = \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x, y_0 - mi\beta)\,dx,$$

$$S_2 = \frac{q(q-1)}{2} A i \omega' + \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega'} F(x, y_0 - mi\beta')\,dx,$$

$$S_3 = pqAi\omega + \sum_{m=0}^{m=p-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega} F(x, y_0 - qi\beta' - mi\beta)\,dx,$$

$$S_4 = \frac{q(q-1)}{2} A i \omega' + \sum_{m=0}^{m=q-1} \int_{x_0}^{x_0+\omega'} F(x, y_0 - pi\beta - mi\beta')\,dx.$$

Appelons pour abréger Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 les sommes d'intégrales qui figurent respectivement dans ces expressions de S_1, S_2, S_3, S_4 de telle sorte que

$$S_1 = \Sigma_1,\quad S_2 = \frac{q(q-1)}{2} A i \omega' + \Sigma_2,\quad S_3 = pqAi\omega + \Sigma_3,\quad S_4 = \frac{q(q-1)}{2} A i \omega' + \Sigma_4$$

et par suite de la formule (11):

$$2i\pi N_{p,q} = \pm(-pqAi\omega + \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \Sigma_3).$$

Comme $A\omega$ est réel (formule 7), les parties réelles de Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 se détruisent dans cette somme. D'autre part, en vertu de la remarque faite au début de ce paragraphe, les parties imaginaires de chacune des intégrales figurant dans les sommes Σ_1, Σ_2, Σ_3 et Σ_4 sont toutes inférieurs à un nombre positif fini B, qui dépend de x_0, y_0, mais pas du tout de p et q. Il résulte de là que les parties imaginaires de Σ_1 et Σ_3 ont des modules inférieurs à pB et celles de Σ_2 et Σ_4 des modules inférieurs à qB, de telle sorte que l'on peut poser:

$$2i\pi N_{p,q} = \pm(-pqAi\omega + i\alpha_1 + i\alpha_2 + i\alpha_3 + i\alpha_4)$$

les α étant quatre nombres réels tels que

(12) $$|\alpha_1| < pB,\quad |\alpha_2| < qB,\quad |\alpha_3| < pB,\quad |\alpha_4| < qB.$$

La rélation précédente peut encore s'écrire:

$$\frac{N_{p,q}}{pq} = \pm\left(-\frac{A\omega}{2\pi} + \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2\pi\, pq}\right).$$

Comme

$$\left|\frac{\alpha_1}{pq}\right| < \frac{B}{q}, \quad \left|\frac{\alpha_2}{pq}\right| < \frac{B}{p}, \quad \left|\frac{\alpha_3}{pq}\right| < \frac{B}{q}, \quad \left|\frac{\alpha_4}{pq}\right| < \frac{B}{p},$$

on voit que si p et q augmentent *tous deux* indéfiniment on aura:

$$\lim \frac{N_{p,q}}{pq} = \mp\frac{A\omega}{2\pi} = \mp\frac{m_{1,3}\,\beta + m_{2,1}\,\beta' + 2\,m_{3,2}\,\pi}{2\pi};$$

le signe supérieur se rapporte au cas où le coefficient de i dans $\frac{\omega'}{\omega}$ est positif.

On peut exprimer le résultat précédent en disant que le nombre réel $\mp\frac{A\omega}{2\pi}$ est le *nombre moyen* de zéros de la fonction $g_1(x, y_0)$ par parallélogramme construit sur les périodes ω et ω' et ce nombre moyen ne dépend pas de la valeur choisie pour y_0: il ne dépend que des entiers caractéristiques et de β, β'. Ce nombre ne peut être évidemment négatif; on en conclut donc que la quantité réelle $\frac{A\omega}{2\pi}$ est de signe contraire à la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega}$. On peut se demander toutefois si ce nombre ne peut pas être nul. On voit que c'est impossible de la façon suivante.

Nous avons montré que l'équation

$$g_1(x, y_0) = 0$$

admet au moins un zéro dans chaque parallélogramme du réseau construit avec les côtés $q_1\omega$, $q_1\omega'$ si q_1 est un entier positif convenablement choisi qui peut dépendre de y_0; ceci a été établi (paragraphe II) sous la seule hypothèse que $g_1(x, y)$ n'est pas une fonction ne s'annulant pour aucun système de valeurs de x et y et sous l'hypothèse de la triple périodicité de ses zéros. Prenons

$$p = q = s q_1$$

s étant un entier positif. Dans le parallélogramme $P_{p,q}$ il y aura au moins s^2 zéros de $g_1(x, y_0)$ et l'on aura:

$$\frac{N_{p,q}}{pq} \geq \frac{1}{q_1^2}.$$

Si s augmente indéfiniment, on voit que la limite de $\frac{N_{p,q}}{pq}$ est au moins égale à

$\frac{1}{q_1^2}$ et par suite différente de zéro. Par conséquent A *ne peut pas être nul* et par suite les entiers $m_{1,3}$, $m_{2,1}$, $m_{3,2}$ *ne peuvent être tous nuls*, si $g_1(x, y)$ n'est pas une fonction entière qui ne s'annule pas, les trois systèmes de périodes étant toujours supposés non exceptionnels.

15. Si nous considérons une fonction $f(x, y)$ méromorphe aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ on peut la mettre sous forme du quotient de deux fonctions entières $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ *n'admettant aucun facteur commun qui s'annule.* Les entiers caractéristiques communs à $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ seront appelés les entiers caractéristiques de $f(x, y)$; ils sont ainsi définis d'une façon unique, puisque les entiers caractéristiques de $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ ne changent pas lorsqu'on multiplie ces fonctions par une fonction entière qui ne s'annule pas. Si $m_{1,2}$ $m_{2,3}$, $m_{3,1}$ sont les trois entiers communs à $g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$, l'expression $m_{1,3}\beta +$ $m_{2,1}\beta' + 2\, m_{3,2}\pi$ ne peut pas être nulle si $f(x, y)$ n'est pas une constante. Car si cette expression est nulle $g_2(x, y)$ ne peut pas s'annuler, par conséquent $f(x, y)$ serait une fonction entière avec trois systèmes de périodes non exceptionnels, et par suite une constante.

16. Pour mieux interpréter le résultat précédent relatif au signe de $\pm \frac{A\omega}{2\pi}$, mettons en évidence les parties réelles et imaginaires de ω et ω'; soit

$$\omega = \lambda + \mu i, \quad \omega' = \lambda' + \mu' i.$$

Le signe de i dans $\frac{\omega'}{\omega}$ sera celui de $\lambda\mu' - \mu\lambda'$, de telle sorte que nous aurons dans tous les cas:

$$(\lambda\mu' - \mu\lambda')A\omega < 0$$

ou bien, en remplaçant A par sa valeur et remarquant que $m_{2,1} = -m_{1,2}$:

$$(\lambda\mu' - \mu\lambda')(m_{1,2}\beta' + 2\, m_{2,3}\pi + m_{3,1}\beta) > 0.$$

Formons maintenant pour les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ l'invariant I dont nous avons donné la définition au paragraphe 5 de l'Introduction. Il vient:

$$I = 2\pi(\lambda\mu' - \mu\lambda')(m_{1,2}\beta' + 2\, m_{2,3}\pi + m_{3,1}\beta).$$

La condition d'inégalité précédente s'écrit donc

$$I > 0.$$

Nous avons signalé l'invariance du signe de I: il en résulte que si les trois systèmes de périodes sont pris sous la forme la plus générale, au lieu de la forme normale, l'inégalité $I > 0$ doit toujours être vérifiée. Il résultera de la suite de ce Mémoire que cette inégalité nécessaire est la seule condition pour l'existence d'une fonction méromorphe triplement périodique admettant trois systèmes de périodes non exceptionnels donnés arbitrairement avec des entiers caractéristiques donnés également.

L'inégalité précédente que nous avons indiquée antérieurement (C. R. 3 Déc. 1906) s'étend sans aucune difficulté nouvelle au cas des fonctions $(n+1)$ fois périodiques de n variables. Elle contient en elle-même toutes les inégalités de Riemann relatives aux périodes des fonctions abéliennes.

Bornons-nous ici, pour ne pas trop nous écarter de l'objet spécial de notre Mémoire, à signaler brièvement comment on rattache au résultat qui précède les inégalités de Riemann pour les fonctions abéliennes de deux variables. Si $\Theta(x, y)$ est une fonction Θ sous forme normale, avec les quatre systèmes de périodes $(2i\pi, 0)$, $(0, 2i\pi)$, (a, b), (b, c) ses zéros admettent les trois systèmes de périodes $(2i\pi, 0)$, $(0, 2i\pi)$, $(ma+nb, mb+nc)$ m et n étant des entiers quelconques. En écrivant pour ces trois systèmes l'inégalité $I > 0$ on obtient une forme quadratique en m et n qui doit être définie et positive: c'est la condition classique. Le même procédé s'applique à n variables. On peut donc dire que l'inégalité $I > 0$ contient, en elle-même toutes les inégalités de Riemann: Ces inégalités se trouvent ainsi rattachées à la distribution des zéros de la fonction entière $g_1(x, y_0)$.

17. Nous continuerons l'étude des zéros de léquation

$$g_1(x, y) = 0$$

en considérant les différentes déterminations de x pour les valeurs de y appartenant à une bande B du plan de y comprise entre deux des droites de ramifications définies plus haut et ne contenant à son intérieur (frontières exclues) aucune droite de ramifications.

Soit alors

$$x = f_1(y) \tag{13}$$

l'une des déterminations de x; $f_1(y)$ sera donc, comme nous l'avons vu, une fonction uniforme et régulière à l'intérieur de B.

Nous aurons une infinité d'autres déterminations de x par la formule

$$x + m\omega + n\omega' = f_1(y + mi\beta + ni\beta' + 2si\pi) \tag{14}$$

où m, n et s sont trois entiers quelconques positifs ou négatifs ou nuls; car si (x', y') est un zéro de $g_1(x, y)$ vérifiant l'équation

$$x' = f_1(y')$$

on aura un autre zéro en posant $x = x' - m\omega - n\omega'$, $y = y' - mi\beta - ni\beta' - 2\,si\pi$ et (x, y) seront liés par la relation (14) et inversement.

Nous allons montrer que toutes les déterminations (14) ne sont pas distinctes entre elles, c'est-à-dire que $f_1(y)$ satisfait à une identité de la forme

$$(15)\qquad f_1(y + m_1 i\beta + n_1 i\beta' + 2\,s_1 i\pi) - m_1\omega - n_1\omega' = \\ = f_1(y + m_2 i\beta + n_2 i\beta' + 2\,s_2 i\pi) - m_2\omega - n_2\omega'$$

où (m_1, n_1, s_1), (m_2, n_2, s_2) sont six entiers dont les trois derniers ne sont pas respectivement égaux aux trois premiers.

Supposons qu'une telle identité n'existe pas. Deux quelconques, déterminées, des valeurs de x fournies par (14) ne seront égales que pour des valeurs isolées de y; on peut donc toujours attribuer à y une valeur y_1 du domaine B n'appartenant pas à l'ensemble dénombrable des valeurs de y pour lesquelles deux des déterminations de x deviennent égales.

Soient A_0 et A_μ les points du plan de la variable y correspondants respectivement aux valeurs y_1 et $y_1 + 2\,\mu i\pi$, μ désignant un entier positif choisi arbitrairement. La longueur du segment rectiligne $A_0 A_\mu$ est égale à $2\,\mu\pi$. Parmi toutes les valeurs $y_1 - mi\beta - ni\beta' - 2\,si\pi$ ne prenons que celles qui correspondent à des points du segment $A_0 A_\mu$; pour chaque système de valeurs attribuées à m et n, il y aura ainsi μ valeurs de s acceptables et μ points correspondants sur $A_0 A_\mu$. (en supposant, pour plus de précision que A_0 fait partie du segment mais pas A_μ). Sur le segment $A_0 A_\mu$, $f_1(y)$ a un module inférieur à une quantité fixe positive R. Les valeurs de x correspondant aux valeurs considérées pour y, sont de la forme:

$$(16)\qquad x = m\omega + n\omega' + \alpha_{m,n,s}$$

avec

$$|\alpha_{m,n,s}| < R.$$

Pour chaque couple de valeurs arbitraires de m et de n, il y a μ valeurs de $\alpha_{m,n,s}$ distinctes entre elles, puisque les valeurs de x le sont, et auxquelles correspondent, dans le plan de x, μ points intérieurs au cercle de rayon R et de centre $m\omega + n\omega'$. Considérons à nouveau le parallélogramme $P_{p,q}$ construit sur les segments $(x_0, x_0 + p\omega)$ et $(x_0, x_0 + q\omega)$; $N_{p,q}$ désignera encore le nombre des zéros

de $g_1(x, y_1)$ intérieurs à ce parallélogramme. Prenons un second parallélogramme P' *concentrique* au précédent et de côtés $(p-r)\omega$ et $(q-r)\omega'$; p et q sont supposés très-grands et positifs, et l'entier positif r est supposé choisi assez grand pour que tout cercle de rayon R et ayant son centre à l'intérieur de P', soit tout entier contenu dans $P_{p,q}$. La valeur de r ainsi choisie sera indépendante de p et q.

Le parallélogramme P' contient $(p-r)(q-r)$ des points $m\omega+n\omega'$. Le cercle de rayon R et de centre $m\omega+n\omega'$ contenant μ des points (16), on voit que $P_{p,q}$ contiendra au moins $\mu(p-r)(q-r)$ des points $m\omega+n\omega'+a_{m,n,s}$; comme ces points sont tous des zéros de $g_1(x, y_1)$ on voit que

$$N_{p,q} \geq \mu(p-r)\ (q-r);$$

ou bien:

$$\frac{N_{p,q}}{pq} > \mu\left(1-\frac{r}{q}\right)\left(1-\frac{r}{p}\right).$$

Si p et q augmentent indéfiniment, r restant fixe, on aura

$$\lim \frac{N_{p,q}}{pq} > \mu.$$

Or cela est impossible puisque μ est un entier positif arbitraire et que $\frac{N_{p,q}}{pq}$ a une limite déterminée.

Il y a donc nécessairement une identité de la forme (15).

18. Recherchons maintenant tous les systèmes de valeurs des entiers m_1, n_1, s_1, m_2, n_2, s_2 pour lesquels a lieu l'identité (15).

Posons pour cela

$$m_1-m_2=m',\quad n_1-n_2=n',\quad s_1-s_2=s' \tag{17}$$

et remplaçons dans (15) y par $y-m_2 i\beta'-n_2 i\beta'-2\,s_2 i\pi$.

Il viendra:

$$f_1(y+m' i\beta+n' i\beta'+2\,s' i\pi)=f_1(y)+m'\omega+n'\omega'. \tag{18}$$

Soient m'_1, n'_1, s'_1 les quotients de m', n', s' par leur plus grand commun diviseur positif et posons:

$$\gamma=m'_1\beta+n'_1\beta'+2\,s'_1\pi \text{ et } \Omega=m'_1\omega+n'_1\omega'. \tag{19}$$

La relation (18) pourra allors s'écrire comme suit:

(20) $$f_1(y + id\gamma) = f_1(y) + d\Omega$$

d étant le plus grand commun diviseur de m', n', s'.

Si γ était nul, Ω le serait nécessairement aussi d'après la dernière identité; mais comme $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire on aurait $m'_1 = 0$ et $n'_1 = 0$; et ensuite de $\gamma = 0$, on conclurait $s'_1 = 0$. On aurait donc $m' = n' = s' = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse que m_2, n_2, s_2 ne sont pas respectivement égaux tous trois à m_1, n_1, s_1. γ étant donc différent de zéro, la différence

$$f_1(y) - \frac{\Omega}{i\gamma} y.$$

qui admet la période $id\gamma$ et qui est régulière dans la bande B, sera développable à l'intérieur de cette bande en une série d'exponentielles et nous pouvons poser:

(21) $$f_1(y) = \frac{\Omega}{i\gamma} y + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi}{d\gamma} y}.$$

Or on voit bien facilement, en considérant la dérivé de $f_1(y)$ qu'il n'y a pour la fonction $f_1(y)$ qu'un seul développement de la forme (21). Or comme

$$\frac{m'\omega + n'\omega'}{m'\beta + n'\beta' + 2s'\pi} = \frac{\Omega}{\gamma},$$

si m'', n'', s'' est un autre système d'entiers pour lequel l'identité (18) est satisfaite, on aura:

$$\frac{m''\omega + n''\omega'}{m''\beta + n''\beta' + 2s''\pi} = \frac{\Omega}{\gamma}.$$

En remplaçant Ω et γ par leurs valeurs (19), il vient, toutes réductions faites:

$$\omega[(m''n'_1 - m'_1n'')\beta' + 2\pi(m''s'_1 - m'_1s'')] + \\ + \omega'[(n''m'_1 - n'_1m'')\beta + 2\pi(n''s'_1 - n'_1s'')] = 0.$$

Comme $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire, cette condition entraîne les deux suivantes

$$(m''n'_1 - m'_1n'')\beta' + 2\pi(m''s'_1 - m'_1s'') = 0$$
$$(n''m_1' - n'_1m'')\beta + 2\pi(n''s'_1 - n'_1s'') = 0.$$

L'un au moins des deux nombres β ou β' est incommensurable avec π. Si c'est β, la deuxième relation donne

$$n'' m'_1 - n'_1 m'' = 0, \quad n'' s'_1 - n'_1 s'' = 0,$$

et ensuite la première donne:

$$m'' s'_1 - m'_1 s'' = 0.$$

Comme m'_1, n'_1, s'_1 sont premiers entre eux, on conclut des trois dernières relations:

$$m'' = \delta m'_1, \quad n'' = \delta n'_1, \quad s'' = \delta s'_1,$$

où δ est un entier positif ou négatif.

La relation

$$(22) \qquad f_1(y + m'' i\beta + n'' i\beta' + 2 s'' i\pi) = f_1(y) + m''\omega + n''\omega'$$

s'écrit alors

$$(23) \qquad f_1(y + i\delta\gamma) = f_1(y) + \delta\Omega$$

et il s'agit de trouver tous les entiers δ pour lesquels cette relation a lieu.

Soit, pour cela, d_1 le plus petit entier positif non nul pour lequel on a

$$(24) \qquad f_1(y + id_1\gamma) = f_1(y) + d_1\Omega$$

Un tel entier existe puisque l'on a la relation (20) où d n'est pas nul. Posons

$$(25) \qquad \delta = \varrho d_1 + \sigma,$$

où ϱ est un entier positif ou négatif ou nul convenablement choisi et σ un entier positif ou nul inférieur à d_1. De (24) on conclut

$$f_1(y + i\varrho d_1\gamma) = f_1(y) + \varrho d_1\Omega.$$

Changeons dans cette identité y en $y + i\sigma\gamma$; elle devient en tenant compte de (25)

$$f_1(y + i\delta\gamma) = f_1(y + i\sigma\gamma) + \varrho d_1\Omega$$

et d'après (23) et (25):

$$f_1(y + i\sigma\gamma) = f_1(y) + \sigma\Omega.$$

Comme σ est positif ou nul, inférieur à d_1 qui est le plus petit entier non nul vérifiant (24), on a nécessairement:

$$\sigma = 0$$

et d'après (25) et les relations $m'' = \delta m'_1$, $n'' = \delta n'_1$, $s'' = \delta s'_1$ il vient:

$$m'' = \varrho d_1 m'_1, \quad n'' = \varrho d_1 n'_1, \quad s'' = \varrho d_1 s'_1.$$

Réciproquement, si ϱ est un entier quelconque dans ces dernières formules, les valeurs précédentes de m'', n'', s'' conviennent bien à l'identité (22); cela résulte immédiatement de (24). Posons:

$$\gamma_1 = d_1 \gamma = d_1 (m'_1 \beta + n'_1 \beta' + 2 s'_1 \pi),$$

$$\Omega_1 = d_1 \Omega = d_1 (m'_1 \omega + n'_1 \omega').$$

La relation (24) devient

$$f_1(y + i\gamma_1) = f_1(y) + \Omega_1 .$$

On en déduit:

$$f_1(y - i\gamma_1) = f_1(y) - \Omega_1 .$$

Nous pouvons d'aprés cela supposer que le nombre réel γ_1 est positif, sans quoi on le changerait en $-\gamma_1$ en même temps que Ω_1 en $-\Omega_1$. Les quantités $i\gamma_1$ et Ω_1 sont ainsi définies par ce qui précède d'une façon unique. Nous les appellerons les *augments conjugués* relatifs à $f_1(y)$ et nous poserons:

$$\Omega_1 = \mu_1 \omega + \nu_1 \omega', \qquad (26)$$

$$\gamma_1 = \mu_1 \beta + \nu_1 \beta' + 2 \sigma_1 \pi > 0;$$

μ_1, ν_1 et σ_1 sont des entiers définis par là d'une façon unique. Revenant maintenant à l'identité (15) et aux formules (17) et (18) nous voyons que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'identité (15) soit satisfaite sont données par les relations:

$$m_1 - m_2 = \varrho' \mu_1,$$

$$n_1 - n_2 = \varrho' \nu_1, \qquad (27)$$

$$s_1 - s_2 = \varrho' \sigma_1,$$

où ϱ' est un entier quelconque positif ou négatif.

Ces propriétés établies, on voit par un raisonnement très simple que l'on obtient toutes les déterminations distinctes fournies pour x par la formule (14) et chacune une seule fois, en prenant pour m, n et s toutes les valeurs entières positives, négatives, ou nulles pour lesquelles les inégalités

$$0 < m\beta + n\beta' + 2 s\pi < \gamma_1 \qquad (28)$$

sont satisfaites.

Plus généralement si M est un entier positif quelconque on aura chaque détermination distincte répétée M fois, en donnant à m, n et s toutes les valeurs pour lesquelles

$$0 < m\beta + n\beta' + 2 s\pi < M\gamma_1.$$

19. L'ensemble des déterminations distinctes de x dans la formule (14) constitue un ensemble de déterminations telles que l'on passe de l'une à l'autre en ajoutant à x et à y des multiples conjugués des trois systèmes de périodes, et inversement, si l'on ajoute à x et à y des multiples conjugués des périodes, on passe d'une des déterminations à une autre où à la même détermination. Nous entendons par là que si dans l'équation qui définit l'une des déterminations de x pour y intérieur à B, on ajoute à x et y des multiples conjugués des périodes on a une équation définissant encore une des déterminations de x. Choisissons, par exemple, la plus simple des déterminations de x dans les notations précédentes:

$$x = f_1(y).$$

Nous dirons que $x = f_1(y)$ est une *branche principale*, relative à la bande B, de la fonction x définie par

$$g_1(x, y) = 0.$$

$(\Omega_1, i\gamma_1)$ seront appelés les *augments conjugués* relatifs à cette branche principale. Les autres déterminations de la formule (14) ne sont pas considérées comme des branches principales *distinctes* de la précédente, parce qu'elles n'en diffèrent que par des multiples conjugués des périodes. Toutes les valeurs distinctes de x fournies par la formule (14) seront appelées les zéros de $g_1(x, y) = 0$ *relatifs* ou *se rapportant* à la branche principale $x = f_1(y)$.

Remarquons que tout ce qui précède s'applique même au cas où $f_1(y)$ serait une constante, cas qui peut se présenter. La relation $f_1(y + i\gamma_1) = f(y) + \Omega_1$ montre qu'alors Ω_1 est nécessairement nul, c'est-à-dire que $\mu_1 = \nu_1 = 0$; ensuite $\gamma_1 = 2\sigma_1\pi$ doit être le plus petit multiple positif non nul de 2π pour lequel a lieu l'identité précédente: donc $\sigma_1 = 1$; les deux *augments conjugués* sont donc *ici* $(0, 2\pi i)$.

Il peut arriver que tous les zéros de $g_1(x, y)$ qui se rapportent à la *branche principale* $x = f_1(y)$ soient tous des zéros doubles ou triples, etc.... et cela pour une valeur quelconque de y du domaine B. Nous dirons que la branche principale $x = f_1(y)$ a un degré de multiplicité égal à deux, trois etc....

Si la fonction entière $g_1(x, y)$ admet des zéros qui ne se rapportent pas à la branche principale précédente, (y restant toujours dans le domaine B) nous mettrons en évidence une seconde branche principale $x = f_2(y)$ avec des *augments conjugués* $(\Omega_2, i\gamma_2)$ donnés par les formules

$$\Omega_2 = \mu_2\omega + \nu_2\omega',$$

$$\gamma_2 = \mu_{2,1}\beta + \nu_{2,1}\beta' + 2\varrho_2\sigma_2\pi > 0.$$

On aura ainsi une suite de branches principales

$$f_1(y),\ f_2(y),\ f_3(y), \ldots$$

Nous allons montrer que leur nombre est nécessairement fini. Dans tout ce qui va suivre nous supposons toujours, lorsque nous parlerons de l'ensemble des *branches principales* que chacune d'elles est comptée un nombre de fois égal à son degré de multiplicité et que dans la suite

$$f_1(y),\ f_2(y),\ f_3(y), \ldots$$

chacune d'elles est écrite ce nombre de fois.

Ceci posé y_0 étant une valeur quelconque de la bande B posons:

$$x_k^{(0)} = f_k(y_0), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit Π un parallélogramme du plan de x construit sur des côtés ω et ω et soit

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} + m_k\omega + n_k\omega'$$

l'homologue de $x_k^{(0)}$ dans Π. Posons

$$y_k = y_0 + m_k i\beta + n_k i\beta' + 2\, s_k i\pi$$

en choisissant l'entier s_k de façon que y_k appartienne au segment $(y_0, y_0 + 2\, i\pi)$. Dès lors $(x_k^{(1)}, y_k)$ sera un zéro de $g_1(x, y)$ se rapportant à la branche principale $f_k(y)$, $x_k^{(1)}$, y_k appartenant respectivement au parallélogramme Π et au segment $(y_0, y_0 + 2\, i\pi)$.

Si les branches principales étaient en nombre infini, les points y_k que nous venons de définir sur le segment $(y_0, y_0 + 2\, i\pi)$ auraient un point limite $y = b$ appartenant à ce segment. Or pour un domaine choisi assez petit autour du point b, $g_1(x, y)$ n'a qu'un nombre fini de zéros appartenant au parallélogramme Π et se rapportant à des branches principales déterminées en nombre fini. Or cela est manifestement en contradiction avec ce qui précède. Par conséquent, *il n'y a qu'un nombre limité de branches principales relatives à la bande B* chacune des branches étant comptée par son degré de multiplicité. Chacune des fonctions $f_k(y)$, peut être développée sous la forme (21) pour tout l'intérieur de la bande B, et l'on voit que toutes les déterminations de x dans l'équation

$$g_1(x, y) = 0$$

où y appartient à la bande B se déduisent d'un nombre limité de développements de cette forme.

20. Il résulte de ce qui précède que la fonction entière $g_1(x, y)$ dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ ne peut pas être le produit d'un nombre infini de fonctions entières *ayant la même propriété* et dont chacune s'annule pour quelque système de valeurs de x et y. Car la branche principale $x = f_k(y)$ doit appartenir à l'un des facteurs du produit et, par suite de la triple périodicité des zéros de ce facteur, toutes les déterminations de x relatives à cette branche $f_k(y)$ appartiennent au même facteur. Il résulte donc de là que le produit contient *au plus* un nombre de facteurs égal au nombre des branches principales dans la bande B, chacune étant comptée avec son degré de multiplicité.

Supposons que $g_1(x, y)$ puisse être mise sous forme d'un produit de plusieurs facteurs de cette nature. Si l'un des facteurs est lui-même décomposable de la même façon, remplaçons le par ses facteurs. Après un nombre limité d'opérations de cette sorte $g_1(x, y)$ se trouvera mise sous forme d'un produit d'un nombre fini de fonctions entières dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes, dont chacune s'annule pour quelque système de valeurs de x et de y, et dont aucune n'est décomposable en un produit de plusieurs facteurs de même nature. Nous arrivons ainsi à la notion de *facteur irréductible* ou *premier, relativement aux trois systèmes de périodes* $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Remarquons qu'il est essentiel de spécifier les trois systèmes de périodes; car un facteur irréductible relativement à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ peut se trouver être réductible relativement à $(0, 2i\pi)$, $(2\omega, 2i\beta)$, $(\omega', i\beta')$.

Si l'on ne considère pas comme distincts deux facteurs dont le quotient est une fonction entière qui ne s'annule pas, on voit facilement que $g_1(x, y)$ n'est décomposable que d'une seule façon en ses facteurs irréductibles relativement à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Il suffit de remarquer que si les zéros de deux fonctions entières admettent les trois systèmes de périodes, les zéros communs à ces deux fonctions admettent les mêmes périodes et par suite le *plus grand commun diviseur* des deux fonctions entières est une fonction entière ayant la même propriété. Deux facteurs irréductibles relativement aux trois systèmes de périodes précédents, sont donc ou bien identiques, ou bien sans facteur commun s'annulant.

21. Revenons aux augments conjugués $(\Omega_1, i\gamma_1)$. On peut donner une interprétation des entiers μ_1 et ν_1 qui figurent dans les expressions de Ω_1 et γ_1.

Supposons tout le plan de la variable x subdivisé en un réseau de parallélogrammes de côtés ω, ω'. L'un d'eux étant désigné par $\Pi_{0,0}$ nous désignerons par $\Pi_{p,q}$ celui qui se déduit de $\Pi_{0,0}$ par la translation $(p\omega, q\omega')$ p et q étant des entiers positifs ou négatifs ou nuls.

Prenons une valeur quelconque y_0 dans la bande B et posons

$$x_0 = f_1(y_0).$$

Si y décrit le segment rectiligne $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$ dans le sens positif c'est-à-dire de y_0 vers $y_0 + i\gamma_1$, le point $x = f_1(y)$ décrira dans son plan une ligne déterminée Γ, partant du point x_0 et aboutissant au point $x_0 + \Omega_1$, c'est-à-dire au point $x_0 + \mu_1\omega + \nu_1\omega'$. Le sens dans lequel se déplace x dans ce mouvement sur Γ sera le sens positif sur Γ. Dans ce qui suit lorsque nous parlerons d'un déplacement de y, il s'agira toujours, sans qu'il soit besoin de le répéter, d'un déplacement dans le sens positif, sur la droite indéfinie joignant y_0 à $y_0 + i\gamma_1$.

Si nous supposons, pour fixer les idées, que le point x_0 appartient au parallélogramme $\Pi_{0,0}$, le point $x_0 + \Omega_1$ appartiendra au parallélogramme Π_{μ_1,ν_1}.

Nous désignerons par a_0 celui des sommets du parallélogramme $\Pi_{0,0}$ qui est tel que $a_0 + \omega$ et $a_0 + \omega'$ sont deux autres sommets de $\Pi_{0,0}$.

Supposons que y parcourant le segment $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$ le point $x = f_1(y)$ vienne à passer d'un parallélogramme Π_{p_1,q_1} à un parallélogramme Π_{p_1,q_1+1} et soit (x_1, y_1) le couple de valeurs de (x, y) pour lequel a lieu ce passage; de telle sorte que le point x_1 est situé sur le segment rectiligne $[a_0 + p_1\omega + (q_1 + 1)\omega', a_0 + (p_1+1)\omega + (q_1 + 1)\omega']$ et l'on a

$$x_1 = f_1(y_1). \tag{29}$$

Nous aurons un autre zéro (x'_1, y'_1) de $g_1(x, y)$ relatif à la branche principale $f_1(y)$ en posant

$$(30)\qquad \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - p_1\omega - (q_1 + 1)\omega' \\ y'_1 &= y_1 - p_1 i\beta - (q_1 + 1) i\beta' - 2 r_1 i\pi \end{aligned}$$

r_1 étant un entier choisi de façon que y'_1 soit situé sur le segment $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ (l'extrémité y_0 comprise, l'autre exclue). r_1 est ainsi défini de façon unique.

Le point x'_1 sera situé sur le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ et lorsque y traverse la valeur y'_1, il y a un zéro de $g_1(x, y)$, relatif à la branche principale $f_1(y)$, qui traverse en x'_1 le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens direct si $\frac{\omega'}{\omega}$ *a sa partie imaginaire positive.*

Soit (x_2, y_2) un autre couple de valeurs correspondant à un passage de x sur Γ, d'un parallélogramme Π_{p_2,q_2} au parallélogramme Π_{p_2,q_2+1}; on aura

$$x_2 = f_1(y_2) \tag{31}$$

et nous poserons, comme plus haut,

$$(32)\qquad \begin{aligned} x'_2 &= x_2 - p_2\omega - (q_2 + 1)\omega' \\ y'_2 &= y_2 - p_2 i\beta - (q_2 + 1)i\beta' - 2\, r_2 i\pi \end{aligned}$$

y'_2 appartenant au segment $(y_0, y_0 + 2\, i\pi)$ et x'_2 au segment $(a_0, a_0 + \omega)$. Pour $y = y'_2$ il y a un zéro de $g_1(x, y)$ relatif à la branche principale $x = f_1(y)$ qui traverse $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens direct au point x'_2. En général y'_1 et y'_2 sont distinctes. Si elles sont égales et que x'_1 et x'_2 ne le soient pas, pour la valeur $y = y'_1 = y'_2$ il y a deux zéros de $g_1(x, y)$ qui traversent le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ respectivement aux points x'_1 et x'_2. Supposons que, plus particulièrement $y'_1 = y'_2$ et $x'_1 = x'_2$. De (29), (30), (31) et (32) on conclut immédiatement en tenant compte de ce que $x'_2 = x'_1$ et $y'_2 = y'_1$ les relations suivantes:

$$(33)\qquad \begin{aligned} x'_1 + p_1\omega + (q_1 + 1)\omega' &= f_1[y'_1 + p_1 i\beta + (q_1 + 1)i\beta' + 2\, r_2 i\pi] \\ x'_1 + p_2\omega + (q_2 + 1)\omega' &= f_1[y'_1 + p_2 i\beta + (q_2 + 1)i\beta' + 2\, r_2 i\pi] \\ y_1 - y_2 &= (p_1 - p_2)i\beta + (q_1 - q_2)i\beta' + 2\,(r_1 - r_2)i\pi. \end{aligned}$$

Comme les valeurs y_1 et y_2 sont distinctes et appartiennent toutes deux au segment $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$ la différence précédente est différente de zéro et de module inférieur à γ_1; il en résulte, d'après ce que l'on a vu plus haut (paragraphe 18) que les deux déterminations de x fournies par

$$\begin{aligned} x + p_1\omega + (q_1 + 1)\omega' &= f_1[y + p_1 i\beta + (q_1 + 1)i\beta' + 2\, r_1 i\pi] \\ x + p_2\omega + (q_2 + 1)\omega' &= f_1[y + p_2 i\beta + (q_2 + 1)i\beta' + 2\, r_2 i\pi] \end{aligned}$$

sont distinctes; elles deviennent égales toutes deux à x'_1 pour $y = y'_1$ d'après les formules (33). Donc lorsque y traverse la valeur y'_1, il y a deux zéros de $g_1(x, y)$ qui viennent traverser le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ au même point x'_1.

On raisonnerait exactement de la même façon si un plus grand nombre de couples de valeurs analogues à (x'_1, y'_1) venaient se confondre avec (x'_1, y'_1); si λ est ce nombre, il y aurait pour $y = y'_1$, λ zéros de $g_1(x, y)$ relatifs à la branche principale $y = f_1(x)$ qui traverseraient au même point x'_1 le segment $(a_0, a_0 + \omega)$.

Inversement, désignons maintenant par y'_3 un point du segment $(y_0, y_0 + 2\, i\pi)$ pour lequel un zéro de $g_1(x, y)$ *relatif à la branche principale* $x = f_1(y)$ traverse dans le sens direct le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ en un point x'_3. Soit

$$(34)\qquad x + m\omega + n\omega' = f_1(y + mi\beta + ni\beta' + 2\, si\pi)$$

la détermination de x à laquelle appartient le zéro (x'_3, y'_3), on aura ainsi:

$$x'_3 + m\omega + n\omega' = f_1(y'_3 + mi\beta + ni\beta' + 2\, si\pi).$$

Posons:

$$x''_3 = x'_3 + m\omega + n\omega'$$

$$y''_3 = y'_3 + mi\beta + ni\beta' + 2si\pi.$$

Il viendra

$$x''_3 = f_1(y''_3).$$

Soit

$$x_3 = x''_3 + t\Omega_1$$

$$y_3 = y''_3 + ti\gamma_1,$$

où t est un entier choisi de façon que y_3 appartienne au segment $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$. On aura

$$x_3 = f_1(y_3)$$

et il est clair que lorsque y traverse la valeur y_3, x sur la courbe Γ passe par le point x_3 du parallélogramme Π_{p_3, q_3} au parallélogramme Π_{p_3, q_3+1}, en posant

$$p_3 = m + t\mu_1, \quad q_3 = n + t\nu_1 - 1.$$

Si le zéro (x'_3, y'_3) appartient non seulement à la détermination (34) mais aussi à une détermination distincte, se rapportant toujours à la branche $f_1(y)$:

$$x + m'\omega + n'\omega' = f_1(y + m'i\beta + n'i\beta' + 2s'i\pi) \tag{35}$$

on aurait un autre système de valeurs correspondantes, pour x_3 et y_3; écrivons ces nouvelles valeurs que nous désignerons par $x_3^{(1)}$, $y_3^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = x'_3 + m'\omega + n'\omega' + t'\Omega_1$$

$$y_3^{(1)} = y'_3 + m'i\beta + n'i\beta' + 2s'i\pi + t'i\gamma_1.$$

D'où:

$$y_3^{(1)} - y_3 = (m' - m)i\beta + (n' - n)i\beta' + 2(s' - s)i\pi + (t' - t)i\gamma_1. \tag{36}$$

On peut supposer (paragraphe 18) dans (34) et (35) que m, n, s, m', n', s vérifient les inégalités:

$$0 < m\beta + n\beta' + 2s\pi < \gamma_1$$

$$0 < m'\beta + n'\beta' + 2s'\pi < \gamma_1.$$

Dès lors, si l'on avait

$$y_3^{(1)} = y_3$$

d'après (36) on aurait nécessairement $t' = t$, car deux quantités réelles comprises entre 0 et γ_1 ne peuvent pas avoir une différence égale à un multiple entier non nul de γ_1. Ensuite on aurait:

$$x_3^{(1)} = f_1(y_3^{(1)}) = f_1(y_3) = x_3.$$

La différence $x_3^{(1)} - x_3 = (m' - m)\omega + (n' - n)\omega' = 0$ montre que $m = m'$, $n = n'$; enfin (36) donnerait $s = s'$. Donc les deux déterminations (34) et (35) ne seraient pas distinctes contrairement à l'hypothèse. Par suite $y_3^{(1)}$ ne peut être égale à y_3. D'une façon plus générale, si (x'_3, y'_3) appartient à un nombre λ' de déterminations distinctes de x de la forme (34), il y aura λ' valeurs distinctes correspondantes $y_3, y_3^{(1)}, \ldots y_3^{(\lambda'-1)}$.

Il résulte de ce qui précède, que si nous désignons par τ_1 le nombre des valeurs de x, fournies par toutes les déterminations distinctes de la forme (34) qui traversent le segment $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens direct lorsque y parcourt tout le segment $(y_0, y_0 + 2i\pi)$ dans le sens direct; et si d'autre part τ_2 désigne le nombre de fois que $x = f(y)$ passe d'un parallélogramme $P_{p,q}$ au parallélogramme $P_{p,q+1}$ lorsque y parcourt le segment $(y_0, y_0 + i\gamma_1)$ dans le sens direct, on aura nécessairement

$$\tau_1 = \tau_2.$$

Car, d'après ce qui vient d'être établi, à chaque passage du premier mode correspond un passage du second mode, et inversement.

Par le même raisonnement, si l'on désigne par τ'_1 le nombre des traversées de $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens indirect et par τ'_2 le nombre des passages de $x = f(y)$ d'un parallélogramme $P_{p,q}$ au parallélogramme $P_{p,q-1}$, on aura:

$$\tau'_1 = \tau'_2.$$

Mais le point $x = f(y)$ partant de x_0 pour aboutir au point $x_0 + \mu_1\omega + \nu_1\omega'$, on aura:

$$\tau_2 - \tau'_2 = \nu_1$$

et par suite

$$\tau_1 - \tau'_1 = \nu_1;$$

ν_1 est donc la différence algébrique entre le nombre des traversées directes et le nombre des traversées indirectes du segment $(a_0, a_0 + \omega)$ par toutes les déterminations distinctes de x, relatives à la branche principale $x = f_1(y)$.

Si le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ avait sa partie imaginaire négative, dans l'énoncé précédent il faudrait changer ν_1 en $-\nu_1$.

Enfin, on a évidemment un énoncé analogue au précédent, en y changeant ν_1 en $-\mu_1$, et $(a_0, a_0 + \omega)$ en $(a_0, a_0 + \omega')$.

Considérons maintenant toutes les branches principales relatives à la bande B et soit T le nombre de ces branches *chacune d'elles étant répétée un nombre de fois égal à son degré de multiplicité.* Soit $f_k(y)$, $(k = 1, 2, \ldots T)$ l'une quelconque d'entre elles et soient:

$$
(37) \qquad \begin{aligned} \Omega_k &= \mu_k \omega + \nu_k \omega' \\ \gamma_k &= \mu_k \beta + \nu_k \beta' + 2 \varrho_k \pi > 0 \end{aligned}
$$

ses augments conjugués.

Si l'on considère toutes les déterminations de x correspondant à toutes les branches principales, elles correspondent d'une façon univoque aux déterminations de x dans l'équation

$$g_1(x, y) = 0$$

en ayant égard aux degrés de multiplicité.

Donc la différence entre le nombre des zéros de $g_1(x, y)$ qui traversent $(a_0, a_0 + \omega)$ dans le sens direct et le nombre de ceux qui le traversent dans le sens indirect est donné par la somme

$$\pm \sum_{k=1}^{k=T} \nu_k .$$

En rapprochant ce résultat de celui du paragraphe 13, nous aurons:

$$m_{1,2} = \pm \sum_{k=1}^{k=T} \nu_k$$

$$m_{1,3} = \mp \sum_{k=1}^{k=T} \mu_k .$$

Les signes supérieurs sont à prendre si $\frac{\omega'}{\omega}$ a sa partie imaginaire positive; les signes inférieurs, dans le cas contraire.

Remarquons que le cas où l'une des fonctions $f_k(y)$ est une constante ne fait pas exception; car on a alors, comme nous l'avons vu, $\mu_k = \nu_k = 0$ et d'autre part les valeurs correspondantes des x étant constantes, aucune ne traverse $(a_0, a_0 + \omega)$. Les formules précédentes peuvent être complétées par une troisième formule analogue relative aux ϱ_k. Pour l'obtenir, comme β et β' ne sont pas nuls tous deux, supposons $\beta \neq 0$ et effectuons le changement de variables

$$X = x - \frac{\omega}{i\beta} y$$

$$Y = \frac{2\pi}{\beta} y .$$

Les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ deviendront respectivement pour les variables X et Y: $(\omega_1, i\beta_1)$, $(0, 2i\pi)$, $(\omega'_1, i\beta'_1)$ en posant:

$$\omega_1 = -\frac{2\pi\omega}{\beta}, \quad \beta_1 = \frac{4\pi^2}{\beta}, \quad \omega'_1 = \omega' - \frac{\omega\beta'}{\beta}, \quad \beta'_1 = \frac{2\pi\beta'}{\beta}.$$

Nous pouvons supposer que β est positif, sans restreindre la généralité des raisonnements. La partie imaginaire de $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$ est alors de signe contraire à celle de $\frac{\omega'}{\omega}$. Les augments conjugués relatifs à $f_k(y)$ seront évidemment pour les nouvelles variables

$$\varrho_k\omega_1 + \nu_k\omega'_1 \text{ et } i(\varrho_k\beta_1 + \nu_k\beta'_1 + 2\mu_k\pi);$$

cette dernière parenthèse est positive puisqu'elle est égale à

$$\frac{2\pi}{\beta}(\mu_k\beta + \nu_k\beta' + 2\pi\varrho_k) = \frac{2\pi}{\beta}\gamma_k.$$

Si $G_1(X, Y)$ est ce que devient $g_1(x, y)$ par le changement de variables, ses entiers caractèristiques $m'_{1,2}$, $m'_{2,3}$, $m'_{3,1}$ relatifs aux trois systèmes de périodes pris dans l'ordre $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega'_1, i\beta'_1)$ seront les suivants:

$$m'_{1,2} = m_{2,1}, \quad m'_{2,3} = m_{1,3}, \quad m'_{3,1} = m_{3,2}.$$

En appliquant à $G_1(X, Y)$ les formules précédentes, on obtient:

$$\pm \sum_{k=1}^{k=T} \varrho_k = m'_{1,3} = m_{2,3}$$

le signe supérieur se rapportant au cas où la partie imaginaire de $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$ est négative et par suite la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega}$ *positive.*

Cette dernière formule, jointe aux deux précédentes fournit le tableau suivant:

$$\begin{aligned} m_{2,3} &= \pm \Sigma \varrho_k \\ m_{3,1} &= \pm \Sigma \mu_k \\ m_{1,2} &= \pm \Sigma \nu_k \end{aligned} \tag{38}$$

les trois sommations s'étendent à $k = 1, 2, \ldots T$ et les signes supérieurs correspondent au cas où la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega}$ est positive. De ces formules on tire immédiatement les suivantes:

$$\pm \Sigma \Omega_k = m_{1,2}\omega' + m_{3,1}\omega$$

$$\pm \Sigma \gamma_k = m_{1,2}\beta' + 2m_{2,3}\pi + m_{3,1}\beta.$$

Donc: quelle que soit la bande B que l'on considère dans le plan de la variable y, les sommes des augments relatifs à toutes les branches principales restent les mêmes. Remarquons qu'au contraire le nombre T peut changer lorsqu'on change la bande choisie B.

22. Considérons les déterminations distinctes de x relatives à la branche principale $f_k(y)$ qui sont toutes données, et chacune une seule fois, par la formule

$$(39) \qquad x + m\omega + n\omega' = f_k(y + mi\beta + ni\beta' + 2\,si\pi)$$

où l'on suppose

$$0 \leq m\beta + n\beta' + 2\,s\pi < \gamma_k$$

et désignons par $N^{(k)}_{p,q}$ le nombre de ces déterminations intérieures à un parallélogramme $P_{p,q}$ de côtés $p\omega$, $q\omega'$ pour une valeur donnée y_0 de y, appartenant à la bande B; p et q sont deux entiers positifs quelconques. Nous prendrons deux autres parallélogrammes P' et P'' *concentriques* au précédent et de côtés $(p-\nu)\omega$, $(q-\nu)\omega'$ pour le premier, $(p+\nu)\omega$, $(q+\nu)\omega'$ pour le second: ν désigne un entier positif inférieur à p et à q. En outre nous supposons qu'aucun des points $m\omega + n\omega'$ ne se trouve sur les périmètres des parallélogrammes ainsi choisis.

Si M est un entier positif quelconque mais fixe et si dans la formule (39) nous donnons aux entiers m, n et s toutes les valeurs pour lesquels on a

$$(40) \qquad 0 \leq m\beta + n\beta' + 2\,s\pi < M\gamma_k$$

on obtiendra, comme nous l'avons déjà remarqué, M fois chacune des déterminations de x et par conséquent il y aura $M N^{(k)}_{p,q}$ systèmes de valeurs de m, n, s satisfaisant à (40) et fournissant pour $y = y_0$ des valeurs de x intérieures à $P_{p,q}$. Or, pour les valeurs de m, n, s qui satisfont à (40) on peut poser:

$$|f_k(y_0 + mi\beta + ni\beta' + 2\,si\pi)| < R$$

R étant un nombre positif choisi assez grand.

Si p et q sont très-grands, on pourra prendre ν assez grand pour que tout cercle tracé dans le plan de la variable x, de rayon R et de centre $m\omega + n\omega$ soit tout entier intérieur à $P_{p,q}$ si $m\omega + n\omega'$ appartient à P', ou tout entier extérieur à $P_{p,q}$ si $m\omega + n\omega'$ est extérieur à P''. Cette valeur de ν ainsi choisie ne dépend pas des valeurs attribuées à p et q.

Le nombre positif $M\gamma_k$ est compris entre deux multiples entiers consécutifs de 2π; soit

$$(41) \qquad 2\,M'\pi \leq M\gamma_k < 2\,(M' + 1)\,\pi.$$

Il en résulte que pour chaque système de valeurs prises arbitrairement pour m et n, l'inégalité (40) est satisfaite pour M' valeurs au moins de s, et pour $M' + 1$ au plus. Si le point $m\omega + n\omega'$ appartient à P', les M' ou $M' + 1$ valeurs de x correspondantes, pour $y = y_0$ seront toutes intérieures à $P_{p,q}$. Comme il y a $(p - r)\ (q - r)$ points $m\omega + n\omega'$ intérieurs à P', on voit que

$$M N_{p,q}^{(k)} \geq M'(p - r)\ (q - r).$$

Si le point $m\omega + n\omega'$ est extérieur à P'' les M' ou $M' + 1$ valeurs correspondantes de x pour $y = y_0$ seront extérieurs à $P_{p,q}$. Les points $m\omega + n\omega'$ intérieurs à P'' sont donc les seuls qui *puissent* fournir des valeurs de x intérieures à $P_{p,q}$. Donc

$$M N_{p,q}^{(k)} \leq (M + 1)\ (p + r)\ (q + r).$$

On conclut des deux inégalités précédentes les suivantes

$$\frac{M'}{M}\left(1 - \frac{r}{p}\right)\left(1 - \frac{r}{q}\right) \leq \frac{N_{p,q}^{(k)}}{pq} \leq \frac{M' + 1}{M}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\left(1 + \frac{r}{q}\right). \tag{42}$$

Si p et q augmentent tous deux indéfiniment le premier et le dernier membre de ces inégalités ont respectivement pour limite $\frac{M'}{M}$ et $\frac{M'+1}{M}$. D'autre part l'inégalité (41) s'écrit:

$$\frac{M'}{M} \leq \frac{\gamma_k}{2\pi} \leq \frac{M' + 1}{M}.$$

Comme M est arbitraire on voit que $\frac{N_{p,q}^{(k)}}{pq}$ a pour limite $\frac{\gamma_k}{2\pi}$ lorsque p et q augmentent *tous deux* indéfiniment. Nous avons ainsi une interprétation de γ_k.

Remarquons que si $N_{p,q}$ désigne le nombre des zéros de $g_1(x, y_0)$ intérieurs à $P_{p,q}$, on a évidemment

$$\frac{N_{p,q}}{pq} = \sum_{k=1}^{k=T} \frac{N_{p,q}^{(k)}}{pq}$$

et par suite, en passant à la limite et utilisant le résultat du paragraphe 14

$$\pm\,(m_{1,2}\beta' + 2\,m_{2,3}\pi + m_{3,1}\beta) = \sum_{k=1}^{k=T} \gamma_k. \tag{43}$$

Le signe supérieur est à prendre si $\frac{\omega'}{\omega}$ a sa partie imaginaire positive. Si entre β, β' et 2π il n'y a aucune relation linéaire, homogène à coefficients entiers non

tous nuls, cette relation (43) qui est la même qu'une de celles obtenues dans le précédent paragraphe donne immédiatement toutes les formules (38) qui se trouvent démontrées d'une nouvelle manière. Mais cette seconde démonstration est en défaut si il existe entre β, β', 2π une relation de la forme indiquée.

23. Nous nous proposons maintenant de rechercher l'expression générale des fonctions méromorphes triplement périodiques. Pour y parvenir, il suffirait évidemment de trouver l'expression générale des fonctions entières qui satisfont aux identités (5).

On peut tout d'abord apporter dans ces identités une simplification notable; nous avons vu, en effet, que les trois systèmes de périodes peuvent être remplacés par une transformation du premier ordre par trois autres pour lesquels les entiers caractéristiques seront $m'_{2,1}=0$, $m'_{3,1}=0$ et $m'_{2,3}$ égal au plus grand commun diviseur positif μ de $m_{1,2}$, $m_{1,3}$, $m_{2,3}$; cette opération faite, on peut par une substitution linéaire convenable effectuée sur les variables ramener les trois systèmes de périodes à la forme normale. Cela revient à dire qu'au lieu des identités (5) nous pouvons considérer les suivantes:

$$(44)\qquad \begin{cases} g_1(x,\, y+2i\pi) = g_1(x,\, y) \\ g_1(x+\omega,\; y+i\beta) = e^{\varphi(y)}\, g_1(x,\, y) \\ g_1(x+\omega',\; y+i\beta') = e^{\psi(y)-\frac{2i\mu\pi}{\omega}x}\, g_1(x,\, y); \end{cases}$$

comme μ est positif, le rapport $\dfrac{\omega'}{\omega}$ a nécessairement sa partie imaginaire positive; $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ ont le même sens que dans les identités (5). Il apparaît immédiatement, dans la recherche des fonctions entières satisfaisant aux identités (44), que la principale difficulté provient de la présence dans les exposants de e des deux fonctions entières $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ qui satisfont aux identités

$$(45)\qquad \begin{cases} \varphi(y+2i\pi)=\varphi(y), \quad \psi(y+2i\pi)=\psi(y) \\ \varphi(y+i\beta')-\varphi(y)=\psi(y+i\beta)-\psi(y). \end{cases}$$

On se demande tout d'abord si l'on ne pourrait pas en multipliant $g_1(x,y)$ par une fonction entière qui ne s'annule pas $e^{h(x,y)}$, faire en sorte que dans les équations fonctionnelles (44) tous les exposants de e soient des expressions linéaires en x et y.

Il faut pour cela que l'on ait:

$$(46)\quad \begin{cases} h(x, y+2i\pi)-h(x, y)=L_1(x, y) \\ \varphi(y)+h(x+\omega,\ y+i\beta)-h(x, y)=L_2(x, y) \\ \psi(y)+h(x+\omega',\ y+i\beta')-h(x, y)=L_3(x, y) \end{cases}$$

$L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$, $L_3(x, y)$ étant trois expressions linéaires en x et y. On en conclut:

$$\frac{\partial^2 h(x, y+2i\pi)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 h(x+\omega, y+i\beta)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 h(x+\omega', y+i\beta')}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2}=0$$

et par conséquent puisque $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ est une fonction entière triplement périodique:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=2C$$

C étant une constante.

Par suite

$$h(x, y)=Cx^2+xf_1(y)+f_2(y)$$

$f_1(y)$ et $f_2(y)$ étant deux fonctions entières de y.

On peut évidemment supprimer dans $h(x, y)$ le terme en Cx^2 sans inconvénient au point de vue du résultat qu'on veut obtenir. (Les expressions de $L_2(x, y)$ et $L_3(x, y)$ seront seulement modifiées.) Posons donc

$$h(x, y)=xf_1(y)+f_2(y).$$

Des équations (46) on déduit, en dérivant une seule fois par rapport à x:

$$f_1(y+2i\pi)-f_1(y)=\text{const.}$$

$$f_1(y+i\beta)-f_1(y)=\text{const.}$$

$$f_1(y+i\beta')-f_1(y)=\text{const.}$$

Comme β et β' ne sont pas *tous les deux* commensurables avec π, on en conclut que $f_1(y)$ est une expression du premier degré en y: on peut donc encore dans $h(x, y)$ supprimer le terme $xf_1(y)$ sans inconvénient au point de vue du résultat qu'on veut obtenir et l'on prend finalement:

$$h(x, y)=f_2(y).$$

On voit alors par les relations (46) que $f_2(y)$ peut être prise de la forme:

$$f_2(y) = C_1 y + X(y)$$

où C_1 est une constante et $X(y)$ une fonction entière de période $2i\pi$, qui satisfait, d'après les deux dernières relations (46) aux identités suivantes:

$$(47) \qquad \begin{cases} X(y + 2i\pi) = X(y) \\ X(y + i\beta) - X(y) = -\varphi(y) + C_2 \\ X(y + i\beta') - X(y) = -\psi(y) + C_3 \end{cases}$$

où C_2 et C_3 sont des constantes. On voit que pour qu'il existe une fonction $h(x, y)$ satisfaisant à la question posée, il faut et il suffit qu'il existe une fonction entière $X(y)$ satisfaisant aux relations (47). Cette fonction entière, si elle existe, pourra être développée, ainsi que $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ suivant les puissances entières positives et négatives de e^y. L'identification dans les équations (47) fournit alors tous les coefficients du développement de $X(y)$ (à part le terme constant) sans aucune ambiguité et aussi sans aucune incompatibilité en ayant égard aux identités (45) et à ce fait que β et β' ne sont pas tous deux commensurables avec π. Toute la question est de savoir si la série obtenue pour $X(y)$ est convergente et définit bien une fonction entière. Or si $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions entières *quelconques* satisfaisant seulement aux identités (45), il est aisé de voir que la série obtenue pour $X(y)$ n'est pas *toujours* convergente pour toute valeur de y. D'une façon plus précise, la convergence de la série peut avoir toujours lieu pour *certains* systèmes de valeurs de β, β', mais ne pas avoir toujours lieu pour d'autres systèmes de valeurs. Cela dépend de l'ordre d'approximation possible de $\frac{\beta}{2\pi}$ et $\frac{\beta'}{2\pi}$ par deux fractions arithmétiques de même dénominateur, l'ordre d'approximation étant évalué relativement au dénominateur commun. En particulier si l'un des nombres $\frac{\beta}{2\pi}$ ou $\frac{\beta'}{2\pi}$ est algébrique, non rationnel, la série qui donne $X(y)$ est *toujours* convergente. Il en est encore de même si l'un de ces nombres étant incommensurable son développement en fraction continue a tous ses quotients incomplets successifs inférieurs à un nombre déterminé. Il est d'autre part facile de former deux nombres β et β' pour lesquels la série ne serait pas toujours convergente. Mais nous n'insisterons pas davantage sur ces raisonnements qui aboutissent en somme à ce résultat négatif: l'impossibilité de déterminer *dans tous les cas* la fonction $X(y)$ et par suite de débarrasser les équations fonctionnelles (44) des fonctions entières $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ si ces deux dernières fonctions sont deux fonctions entières *quelconques* satisfaisant aux identités (45).

La question se pose ainsi de savoir si ces deux fonctions *peuvent être quelconques*. Nous allons démontrer, à cet égard, *qu'il existe toujours une fonction entière* satisfaisant aux identités (44) où $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont deux fonctions entières, données arbitrairement, satisfaisant seulement aux identités (45).

Nous supposerons, pour simplifier, que dans les identités (44) $\mu = 1$. Cela ne restreint pas la généralité des raisonnements; car si $g_1(x, y)$ satisfait aux identités (44) pour $\mu = 1$, la puissance $n^{\text{ème}}$ de $g_1(x, y)$ satisfait à des identités analogues, avec $\mu = n$ (n étant ici un entier positif arbitraire).

24. Nous aurons dans la démonstration qui va suivre à appliquer plusieurs fois le lemme suivant:

Si $\lambda(y)$ et $\mu(y)$ sont deux fonctions entières de y satisfaisant aux identités

$$(48)\qquad \lambda(y+2i\pi)=\lambda(y),\quad \mu(y+2i\pi)=\mu(y),\quad \lambda(y+i\beta')-\lambda(y)=\mu(y+i\beta)-\mu(y)$$

et satisfaisant en outre à l'identité

$$(49)\qquad \omega'\lambda(y+i\beta')-\omega\mu(y+i\beta)=f_1(y+i\beta)-f_1(y)+f_2(y+i\beta')-f_2(y)+C$$

où $f_1(y)$ et $f_2(y)$ sont deux fonctions entières de y admettant toutes deux la période $2i\pi$ et C une constante, on pourra déterminer une fonction entière $X_1(y)$ de la variable y satisfaisant aux identités

$$(50)\qquad \begin{cases} X_1(y+2i\pi)=X_1(y) \\ X_1(y+i\beta)-X_1(y)=\lambda(y)+c_1,\quad X_1(y+i\beta')-X_1(y)=\mu(y)+c_2 \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes.

Les fonctions $\lambda(y)$, $\mu(y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$ sont développables en séries de la forme:

$$\lambda(y)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{ny}\qquad \mu(y)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} B_n e^{ny}$$

$$f_1(y)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{ny}\qquad f_2(y)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n e^{ny}$$

De la troisième des identités (48), on conclut:

$$A_n(e^{ni\beta'}-1)=B_n(e^{ni\beta}-1)\quad (n\neq 0;\ n=\pm 1, \pm 2, \cdots \pm\infty)$$

Comme β et β' ne sont pas tous deux commensurables avec π, on peut écrire cette dernière relation sous la forme:

$$\frac{A_n}{e^{ni\beta}-1}=\frac{B_n}{e^{ni\beta'}-1}=C_n \quad (n=\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \infty)$$

C_n ayant ainsi une valeur finie, bien déterminée. Pour satisfaire aux identités (50) on voit immédiatement que $X_1(y)$ doit être la somme de la série:

(51) $$X_1(y)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{ny}$$

où l'on prendra pour C_0 une constante arbitraire; la sommation s'étend à toutes les valeurs positives, négatives, ou nulles de l'entier n. Tout revient donc à démontrer la convergence de la série (51). Soit ε un nombre positif très-petit mais fixe. Les termes de (51) correspondant aux valeurs de n pour lesquelles l'une des inégalités suivantes

$$|e^{ni\beta}-1|>\varepsilon \quad \text{ou} \quad |e^{ni\beta'}-1|>\varepsilon$$

est satisfaite, forment évidement une série convergente. Il nous suffit donc d'étudier la série

(52) $$\sum C_p e^{py}$$

comprenant tous les autres termes pour lesquels on a simultanément

(53) $$|e^{pi\beta}-1|<\varepsilon, \quad |e^{pi\beta'}-1|<\varepsilon.$$

La convergence de la série (52) va résulter de l'identité (49). En remplaçant, en effet, les fonctions qui y figurent par leurs développements et en substituant à A_p et B_p leurs valeurs $C_p(e^{pi\beta}-1)$ est $C_p(e^{pi\beta'}-1)$, il vient:

$$C_p[\omega' e^{pi\beta'}(e^{pi\beta}-1)-\omega e^{pi\beta}(e^{pi\beta'}-1)]=a_p(e^{pi\beta}-1)+b_p(e^{pi\beta'}-1).$$

D'où:

(54) $$C_p=\frac{a_p(e^{pi\beta}-1)+b_p(e^{pi\beta'}-1)}{\omega' e^{pi\beta'}(e^{pi\beta}-1)-\omega e^{pi\beta}(e^{pi\beta'}-1)}.$$

Posons

$$\omega=r_1 e^{i\Theta_1}, \qquad \omega'=r_2 e^{i\Theta_2}$$

en mettant ainsi en évidence les modules et les arguments de ω et de ω'. D'une façon analogue nous pouvons poser:

$$e^{pi\beta}-1=\varrho_p e^{i\left(\varepsilon_p+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$e^{pi\beta'}-1=\varrho'_p e^{i\left(\varepsilon'_p+\frac{\pi}{2}\right)}$$

ϱ_p et ϱ'_p sont inférieurs à ε d'après (53); l'un d'eux peut être nul, mais non tous les deux. Comme $e^{pi\beta}$ et $e^{pi\beta'}$ ont pour module l'unité, on voit que les arguments de $e^{pi\beta}-1$ et de $e^{pi\beta'}-1$ seront très-voisins de $\pm\frac{\pi}{2}$ par suite des inégalités (53) c'est-à-dire que ε_p et ε'_p désignent ici deux nombres très-petits (positifs ou négatifs). Enfin $e^{pi\beta}$ et $e^{pi\beta'}$ ont eux mêmes des arguments très-petits ε''_p et ε'''_p. Ceci posé, le dénominateur de C_p, dans la formule (54) a même module que l'expression:

$$r_2\varrho_p - r_1\varrho'_p\, e^{i\left(\theta_1-\theta_2+\varepsilon'_p-\varepsilon_p+\varepsilon''_p-\varepsilon'''_p+K\pi\right)}$$

où K est 0 ou ± 1. Ce module est supérieur à chacune des quantités

$$\left| r_2\varrho_p \sin\left(\theta_1-\theta_2+\varepsilon'_p-\varepsilon_p+\varepsilon''_p-\varepsilon'''_p\right)\right|$$
$$\left| r_1\varrho'_p \sin\left(\theta_1-\theta_2+\varepsilon'_p-\varepsilon_p+\varepsilon''_p-\varepsilon'''_p\right)\right|.$$

Comme $\theta_1-\theta_2$ n'est pas un multiple de π et comme les ε'_p, ε_p, ε''_p, ε'''_p sont tous inférieurs à un nombre positif choisi arbitrairement petit si ε a lui-même été pris assez petit, on voit que les sinus précédents sont tous supérieurs en valeur absolue à un nombre positif fixe η. On a donc enfin en posant:

$$\left|\omega' e^{pi\beta'}(e^{pi\beta}-1)-\omega e^{pi\beta}(e^{pi\beta'}-1)\right| = R_p$$
$$R_p > r_2\varrho_p\eta$$
$$R_p > r_1\varrho'_p\eta$$

pour toutes les valeurs de p correspondant à tous les termes de la série (52). Il résulte ensuite de l'expression (54) l'inégalité suivante:

$$|C_p| \leq \frac{|a_p|}{\eta r_2}+\frac{|b_p|}{\eta r_1};$$

η, r_1 et r_2 étant trois nombres fixes, on voit que la série (52) est bien convergente puisque les séries $\Sigma a_p e^{py}$ et $\Sigma b_p e^{py}$ sont elles-mêmes absolument convergentes.

Le lemme énoncé se trouve ainsi démontré. Faisons remarquer que les constantes c_1 et c_2 des identités (50) sont respectivement égales à $-A_0$ et $-B_0$.

25. Désignons par $F(y)$ une fonction entière de la variable y, admettant la période $2i\pi$:

$$F(y+2i\pi) = F(y)$$

et cherchons à former une fonction entière de x et y admettant pour zéros toutes les valeurs de x et y satisfaisant aux relations suivantes

$$x - m\omega - n\omega' = F(y - mi\beta - ni\beta') \tag{55}$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. On voit tout de suite, soit directement, soit en se reportant à ce que nous avons dit à propos des branches principales que toutes les déterminations de x fournies par ces relations sont distinctes (c'est-à-dire que deux d'entre elles ne deviennent égales que pour des valeurs particulières de y). En outre si l'on considère $F(y)$ comme une branche principale ses augments conjugués sont $(0, 2i\pi)$.

Posons pour abréger

$$u(m, n) = x - F(y - mi\beta - ni\beta')$$
$$v(m, n) = m\omega + n\omega'$$

pour toutes les valeurs de m et n.

Soit ensuite

$$U(m, n) = \mathrm{Log}\left[1 - \frac{u(m, n)}{v(m, n)}\right] + \frac{u(m, n)}{v(m, n)} + \frac{1}{2}\left[\frac{u(m, n)}{v(m, n)}\right]^2$$

pour toutes les valeurs de m et n, sauf pour $m = n = 0$.

Pour $m = n = 0$, nous posons

$$U(0, 0) = \mathrm{Log}[x - F(y)] = \mathrm{Log}\, u(0, 0).$$

La fonction $F(y)$ admettant la période $2i\pi$, si x et y ont un système de valeurs données quelconques mais fixes, toutes les quantités $u(m, n)$ ont des modules inférieurs à un nombre positif fixe. Il en résulte que l'on définit une fonction entière $g(x, y)$ en posant:

$$g(x, y) = \Pi\, e^{U(m, n)} \tag{56}$$

le produit Π s'étendant à toutes les valeurs de m et de n entières, positives, négatives ou nulles. La fonction $g(x, y)$ admet évidemment les zéros définis par les relations (55) et n'en admet pas d'autres.

Posons:

$$h(x, y) = \mathrm{Log}[g(x, y)] = \Sigma U_{m, n}$$

$$\left|\begin{aligned} k(x, y) &= \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = \Sigma \frac{\partial U(m, n)}{\partial x} \\ l(x, y) &= \frac{\partial^2 h(x, y)}{\partial x^2} = \Sigma \frac{\partial^2 U(m, n)}{\partial x^2}. \end{aligned}\right. \tag{57}$$

Les sommations s'étendent à toutes les valeurs de m et n; $k(x, y)$ et $l(x, y)$ sont ainsi définies d'une façon unique; $h(x, y)$ est définie à un multiple près de $2i\pi$. On a:

$$\frac{\partial U(m,n)}{\partial x} = \frac{1}{u(m,n) - v(m,n)} + \frac{1}{v(m,n)} + \frac{u(m,n)}{[v(m,n)]^2} \tag{58}$$

sauf pour $m = n = 0$: $$\frac{\partial U(0,0)}{\partial x} = \frac{1}{u(0,0)}.$$

De même

$$\frac{\partial^2 U(m,n)}{\partial x^2} = \frac{-1}{[u(m,n) - v(m,n)]^2} + \frac{1}{[v(m,n)]^2} \tag{59}$$

sauf pour $m = n = 0$: $$\frac{\partial^2 U(0,0)}{\partial x^2} = \frac{-1}{[u(0,0)]^2}.$$

Il résulte immédiatement de l'expression (57) de $l(x, y)$ en série que chacune des différences $l(x+\omega, y+i\beta) - l(x, y)$ et $l(x+\omega', y+i\beta') - l(x, y)$ est une constante; ces deux constantes sont nulles; car elles ne dépendent en rien du choix de $F(y)$ et si l'on prend $F(y)$ nulle identiquement, $l(x, y)$ se réduit alors à la fonction de WEIERSTRASS px changée de signe. Comme $k(x, y)$ a pour dérivée, par rapport à x, $l(x, y)$ nous pouvons poser:

$$\left\{\begin{aligned} k(x+\omega, y+i\beta) - k(x, y) &= \lambda_1(y) \\ k(x+\omega', y+i\beta') - k(x, y) &= \mu_1(y) \end{aligned}\right. \tag{60}$$

où $\lambda_1(y)$ et $\mu_1(y)$ sont évidemment des fonctions entières de y admettant la période $2i\pi$, ainsi que cela résulte immédiatement de l'expression (57) de $k(x, y)$ en série. En outre, $k(x, y)$ étant uniforme on déduit de (60):

$$\lambda_1(y+i\beta') - \lambda_1(y) = \mu_1(y+i\beta) - \mu_1(y). \tag{61}$$

Les fonctions $\lambda_1(y)$ et $\mu_1(y)$ satisfont à une autre identité que nous obtiendrons en considérant la fonction primitive $h(x, y)$ de $k(x, y)$ relativement à variable x.

La fonction $h(x, y)$ a des déterminations multiples, différant entre elles par des multiples de $2i\pi$. Mais chacune des déterminations des différences $h(x+\omega, y+i\beta) - h(x, y)$ et $h(x+\omega', y+i\beta') - h(x, y)$ est une fonction uniforme, entière de x et y. Nous choisirons deux quelconques de ces déterminations et nous poserons, en ayant égard aux identités (60)

$$\left\{\begin{aligned} h(x+\omega, y+i\beta) - h(x, y) &= x\lambda_1(y) + \lambda_2(y) \\ h(x+\omega', y+i\beta') - h(x, y) &= x\mu_1(y) + \mu_2(y). \end{aligned}\right. \tag{62}$$

Dans ces relations $\lambda_2(y)$ et $\mu_2(y)$ sont des fonctions uniformes entières de y. Elles admettent la période $2i\pi$; on le voit immédiatement en employant l'expression (57) de $h(x, y)$ en série et en réunissant, dans la différence des séries qui donnent

$h(x+\omega,\ y+i\beta)$ et $h(x, y)$, en un seul terme les deux termes, pris respectivement dans chaque série, dont la différence est une fonction entière de x et y. Dans la série ainsi obtenue, tous les termes sont alors des fonctions uniformes dans lesquelles y n'entre que par la fonction $F(y)$ qui admet la période $2i\pi$.

Des identités (62), on conclut la suivante, en changeant x et y dans la première en $x+\omega'$, $y+i\beta'$ et dans la seconde en $x+\omega$, $y+i\beta$:

$$(x+\omega')\lambda_1(y+i\beta')+\lambda_2(y+i\beta')-x\lambda_1(y)-\lambda_2(y)=$$
$$=(x+\omega)\mu_1(y+i\beta)+\mu_2(y+i\beta)-x\mu_1(y)-\mu_2(y)-2iK\pi;$$

K est un nombre entier positif, négatif ou nul (dont la valeur sera obtenue plus loin); le terme $2iK\pi$ provient des déterminations multiples possibles de $h(x, y)$.

Cette dernière identité se simplifie à cause de l'identité (61) et nous avons, toutes réductions faites:

$$\omega'\lambda_1(y+i\beta')-\omega\mu_1(y+i\beta)=\mu_2(y+i\beta)-\mu_2(y)+\lambda_2(y)-\lambda_2(y+i\beta')-2iK\pi. \tag{63}$$

Les fonctions $\lambda_1(y)$ et $\mu_1(y)$ satisfont ainsi à toutes les conditions du lemme du paragraphe précédent. Il existe donc une fonction entière de y, $X_1(y)$ admettant la période $2i\pi$ et vérifiant en outre les identités:

$$X_1(y+i\beta)-X_1(y)=\lambda_1(y)-c_1,\quad X_1(y+i\beta')-X_1(y)=\mu_1(y)-c_2. \tag{64}$$

Les constantes c_1 et c_2 sont les termes constants des développements de $\lambda_1(y)$ et $\mu_1(y)$ suivant les puissances entières de e^y. Elles sont liées par une relation qui se déduit immédiatement de l'identité (63) en y remplaçant toutes les fonctions par leurs développements.

On a ainsi

$$\omega'c_1-\omega c_2=-2iK\pi. \tag{65}$$

Nous pouvons donc poser

$$c_1=c\omega,\quad c_2=c\omega'+\frac{2iK\pi}{\omega}, \tag{66}$$

où c est une constante convenablement choisie.

Si nous posons:

$$\begin{cases} k_1(x, y)=k(x, y)-cx-X_1(y) \\ h_1(x, y)=h(x, y)-\dfrac{cx^2}{2}-xX_1(y) \end{cases} \tag{67}$$

on aura encore:

$$\frac{\partial h_1(x, y)}{\partial x} = k_1(x, y).$$

Il résulte des relations (60), (66) et (64) les suivantes:

$$(68) \qquad \begin{cases} k_1(x + \omega,\ y + i\beta) - k_1(x, y) = 0 \\ k_1(x + \omega',\ y + i\beta') - k_1(x, y) = \dfrac{2iK\pi}{\omega}. \end{cases}$$

On pourra ensuite poser

$$(69) \qquad \begin{cases} h_1(x + \omega,\ y + i\beta) - h_1(x, y) = \lambda_3(y) \\ h_1(x + \omega',\ y + i\beta') - h_1(x, y) = \dfrac{2iK\pi}{\omega}\, x + \mu_3(y); \end{cases}$$

$\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ sont données par les formules

$$\lambda_3(y) = \lambda_2(y) - \frac{c\omega^2}{2} - \omega X_1(y + i\beta)$$

$$\mu_3(y) = \mu_2(y) - \frac{c\omega'^2}{2} - \omega' X_1(y + i\beta')$$

$\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ admettent donc la période $2i\pi$. D'ailleurs de (69) on conclut, en ayant égard aux déterminations multiples de $h_1(x, y)$:

$$\lambda_3(y + i\beta') - \lambda_3(y) = \mu_3(y + i\beta) - \mu_3(y) + \text{multiple de } 2i\pi.$$

Mais ce dernier multiple est nécessairement nul comme on le voit en imaginant $\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ remplacées par leurs développements suivant les puissances de e^y. Par conséquent on a l'identité

$$(70) \qquad \lambda_3(y + i\beta') - \lambda_3(y) = \mu_3(y + i\beta) - \mu_3(y).$$

(que l'on pourrait d'ailleurs déduire des expressions de $\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ écrites ci-dessus).

Considérons maintenant la fonction $g_1(x, y)$ définie par l'égalité

$$g_1(x, y) = e^{h_1(x,y)}.$$

Nous aurons, d'après (57) et (67)

$$(71) \qquad g_1(x, y) = g(x, y)\, e^{-\frac{cx^2}{2} - xX_1(y)}.$$

La fonction $g_1(x, y)$ a les mêmes zéros que $g(x, y)$ et elle vérifie les identités suivantes:

$$(72)\qquad \begin{cases} g_1(x,\ y+2i\pi) = g_1(x,\ y) \\ g_1(x+\omega,\ y+i\beta) = e^{\lambda_3(y)}\, g_1(x,\ y) \\ g_1(x+\omega',\ y+i\beta') = e^{\frac{2iK\pi}{\omega}x+\mu_3(y)}\, g_1(x,\ y) \end{cases}$$

Dans une bande B du plan de la variable y, limitée par deux parallèles quelconques à l'axe des imaginaires, les zéros de $g_1(x, y)$ n'admettent qu'une seule branche principale $x = F(y)$ avec les augments $(0,\ 2i\pi)$. D'après les formules (38), en supposant toujours que la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega}$ est positive, les entiers caractéristiques de $g_1(x, y)$ sont: $m_{2,3} = 1$; $m_{3,1} = m_{1,2} = 0$. Donc dans la troisième des identités (72) on a:

$$K = -1.$$

Poursuivons l'analyse qui précède en établissant entre $\lambda_3(y)$ et $\mu_3(y)$ une identité *analogue* à l'identité (63) et par l'emploi des mêmes moyens; c'est-à-dire que nous prendrons une fonction primitive de $h_1(x, y)$ relativement à la variable x. Pour cela nous poserons:

$$V(m,\ n) = [u(m,\ n) - v(m,\ n)]\,\mathrm{Log}\left[1 - \frac{u(m,\ n)}{v(m,\ n)}\right] - u(m,\ n) + \frac{[u(m,\ n)]^2}{2v(m,\ n)} + \frac{[u(m,\ n)]^3}{6[v(m,\ n)]^2}$$

pour toutes les valeurs de m et n, sauf $m = n = 0$. Pour ce système de valeurs nous poserons:

$$V(0,\ 0) = u(0,\ 0)\log u(0,\ 0) - u(0,\ 0).$$

Nous définirons une fonction $Z(x, y)$ par la série évidemment convergente:

$$(73)\qquad Z(x,\ y) = \Sigma\, V(m,\ n)$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles de m et n. On suppose, bien entendu, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point classique, que l'on prend des déterminations des logarithmes qui figurent dans les $V(m, n)$ de façon à assurer la convergence de la série.

La fonction $Z(x, y)$ a une infinité de déterminations possibles et la différence entre deux de ses déterminations est égale à la somme algébrique d'un nombre fini de termes dont chacun est de la forme

$$\pm 2i\pi[u(m,\ n) - v(m,\ n)]$$

un même terme pouvant se trouver répété plusieurs fois. Chacune des déterminations de $Z(x, y)$ a pour dérivée par rapport à x, l'une des déterminations de $h(x, y)$.

Nous poserons

$$Z_1(x, y) = Z(x, y) - \frac{cx^3}{6} - \frac{x^2}{2} X_1(y) \tag{74}$$

de telle sorte que:

$$\frac{\partial Z_1(x, y)}{\partial x} = h_1(x, y) + \text{un multiple de } 2i\pi . \tag{75}$$

Il en résulte d'après (69), où $K = -1$, les identités suivantes:

$$\begin{cases} Z_1(x+\omega,\ y+i\beta) - Z_1(x, y) = [2ip\pi + \lambda_3(y)]x + \lambda_4(y) \\ Z_1(x+\omega',\ y+i\beta') - Z_1(x, y) = [2iq\pi + \mu_3(y)]x + \mu_4(y) - \dfrac{i\pi}{\omega} x^2 \end{cases} \tag{76}$$

dans lesquelles on a choisi arbitrairement une détermination pour chacun des premiers membres; p et q sont deux entiers; $\lambda_4(y)$ et $\mu_4(y)$ sont deux fonctions entières de y admettant la période $2i\pi$: on le voit à l'aide de la série (73) en raisonnant comme on l'a fait pour $\lambda_2(y)$ et $\mu_2(y)$.

Si dans les identités (76) nous changeons x et y dans la première en $x+\omega'$, $y+i\beta'$, dans la seconde en $x+\omega$, $y+i\beta$, nous obtenons une nouvelle identité qui s'écrira de la façon suivante, en tenant compte de (70) et aussi des déterminations multiples possibles de $Z_1(x, y)$:

$$\begin{cases} \omega'\lambda_3(y+i\beta') - \omega\mu_3(y+i\beta) = \mu_4(y+i\beta) - \mu_4(y) - \lambda_4(y+i\beta') + \\ \qquad + \lambda_4(y) + (2q-1)i\pi\omega - 2ip\pi\omega' - 2i\pi x + S' - S'' \end{cases} \tag{77}$$

où S' et S'' désignent chacune une somme de termes de la forme $+2i\pi[u(m, n) - v(m, n)]$, un même terme pouvant être répété plusieurs fois.

Or on a:

$$u(m, n) - v(m, n) = x - m\omega - n\omega' - F(y - im\beta - in\beta').$$

On voit alors par l'identification des termes en x dans (77) que S' renferme un terme de plus que S''; on peut toujours supposer que S' renferme le terme $2i\pi[x - F(y)]$, car on peut toujours ajouter ce terme à la fois à S' et S''. Nous poserons alors:

$$S' = 2i\pi[x - F(y)] + S'_1 \tag{78}$$

S'_1 aura alors le même nombre de termes que S'' et par suite la différence $S'_1 - S''$ sera une somme de termes de la forme

$$2i\pi[F(y - mi\beta - ni\beta') - F(y - m'i\beta - n'i\beta')] \tag{79}$$

augmentée d'une somme de multiples de $2i\pi\omega$ et $2i\pi\omega'$.

On peut donc poser:

$$(80)\quad \begin{cases} (2q-1)i\pi\omega - 2ip\pi\omega' - 2i\pi x + S' - S'' = -2i\pi F(y) + \\ \qquad\qquad + (2q_1+1)i\pi\omega + 2p_1 i\pi\omega' + T \end{cases}$$

où p_1 et q_1 sont deux entiers et T est une somme d'un nombre fini de termes de la forme (79) avec

$$(81)\qquad T = S'_1 - S'' + 2(q - q_1 - 1)i\pi\omega - 2(p+p_1)i\pi\omega'.$$

Si nous posons:

$$F_1(y) = F(y - mi\beta - n'i\beta')$$

et

$$n' - n = \nu, \qquad m - m' = \mu$$

il en résultera:

$$(82)\quad \begin{cases} F(y - mi\beta - ni\beta') - F(y - m'i\beta - n'i\beta') = F_1(y + \nu i\beta') - \\ \qquad\qquad - F_1(y) + F_1(y) - F_1(y + \mu i\beta). \end{cases}$$

Si ν était nul, la différence $F_1(y+\nu i\beta') - F_1(y)$ serait nulle et il n'y aurait pas à en tenir compte dans ce qui suit. Supposons $\nu \neq 0$ et tout d'abord pour fixer les idées $\nu > 0$. On pourra alors poser:

$$(83)\qquad F_1(y + \nu i\beta') - F_1(y) = F_2(y + i\beta') - F_2(y)$$

avec

$$F_2(y) = \sum_{r=0}^{r=\nu-1} F_1(y + ri\beta').$$

Si ν était négatif et égal à $-\nu'$, on prendrait:

$$F_2(y) = -\sum_{r=1}^{r=\nu'} F_1(y - ri\beta')$$

et l'on aurait encore l'identité (83), où $F_2(y)$ est manifestement une fonction entière admettant la période $2i\pi$ comme $F(y)$.

De façon analogue, on pourra poser:

$$F_1(y) - F_1(y + \mu i\beta) = F_3(y + i\beta) - F_3(y)$$

de telle sorte que le terme général (79) de la somme T peut être mis sous la forme:

$$2i\pi[F_2(y+i\beta') - F_2(y) + F_3(y+i\beta) - F_3(y)].$$

Mais la somme d'un nombre quelconque de termes de la forme $f(y+i\beta)-f(y)$, [ou de la forme $f_1(y)-f_1(y+i\beta)$ qui n'en est pas distincte], où $f(y)$ et $f_1(y)$ sont des fonctions entières de y admettant la période $2i\pi$, est évidemment elle-même de la forme $\Phi(y+i\beta)-\Phi(y)$, où $\Phi(y)$ est une fonction entière admettant la période $2i\pi$.

Il résulte de là que l'on peut poser:

$$(84)\quad \mu_4(y+i\beta)-\mu_4(y)-\lambda_4(y+i\beta')+\lambda_4(y)+T=\Phi_1(y+i\beta)-\Phi_1(y)+\Phi_2(y+i\beta')-\Phi_2(y)$$

où $\Phi_1(y)$ et $\Phi_2(y)$ sont deux fonctions entières admettant la période $2i\pi$. A l'aide des relations (77), (80) et 84) on obtient l'identité suivante:

$$(85)\begin{cases}\omega'\lambda_3(y+i\beta')-\omega\mu_3(y+i\beta)=\Phi_1(y+i\beta)-\Phi_1(y)+\Phi_2(y+i\beta')-\Phi_2(y)-2i\pi F(y)+C\\ \qquad\text{avec}\qquad C=(2q_1+1)i\pi\omega+2ip_1\pi\omega'\end{cases}$$

Soient maintenant $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ deux fonctions entières de y prises arbitrairement sous les seules conditions exprimées par les relations suivantes:

$$(86)\qquad\begin{cases}\varphi(y+2i\pi)=\varphi(y), \qquad \psi(y+2i\pi)=\psi(y)\\ \varphi(y+i\beta')-\varphi(y)=\psi(y+i\beta)-\psi(y).\end{cases}$$

La fonction $F(y)$ ayant été prise au début d'une façon arbitraire, nous pouvons supposer que son choix a été déterminé par la relation suivante:

$$(87)\qquad 2i\pi F(y)=\omega\psi(y+i\beta)-\omega'\varphi(y+i\beta')$$

car cette égalité définit bien une fonction entière admettant la période $2i\pi$.

Si $F(y)$ a été ainsi choisie l'identité (85) devient:

$$(88)\qquad \omega'\lambda(y+i\beta')-\omega\mu(y+i\beta)=\Phi_1(y+i\beta)-\Phi_1(y)+\Phi_2(y+i\beta')-\Phi_2(y)+C$$

où l'on a posé:

$$(89)\qquad \lambda(y)=\lambda_3(y)-\varphi(y)\quad\text{et}\quad \mu(y)=\mu_3(y)-\psi(y).$$

Des identités (70) et (86), on conclut pour $\lambda(y)$ et $\mu(y)$ la suivante:

$$\lambda(y+i\beta')-\lambda(y)=\mu(y+i\beta)-\mu(y).$$

D'autre part $\lambda(y)$ et $\mu(y)$ admettent la période $2i\pi$; donc on peut appliquer le lemme démontré; il existe une fonction entière $X_2(y)$ satisfaisant aux identités:

$$(90)\quad\begin{cases}X_2(y+2i\pi)=X_2(y)\\ X_2(y+i\beta)-X_2(y)=\lambda(y)-c_3\,,\ X_2(y+i\beta')-X_2(y)=\mu(y)-c_4\,.\end{cases}$$

Les constantes c_3 et c_4 sont liées par la relation

$$\omega' c_3 - \omega c_4 = C = (2q_1 + 1) i\pi\omega + 2ip_1\pi\omega'$$

qui résulte de (88) par un raisonnement déjà employé pour c_1 et c_2. Nous pouvons donc poser, c'' désignant une constante convenablement choisie:

$$(91) \qquad \begin{cases} c''\omega = c_3 - 2ip_1\pi \\ c''\omega' = c_4 + (2q_1 + 1)i\pi. \end{cases}$$

Prenons ensuite:

$$(92) \qquad h_2(x, y) = h_1(x, y) - X_2(y) - c''x.$$

Il résulte des identités (69) et (90) les deux suivantes: (en se souvenant que $K = -1$)

$$(93) \qquad \begin{cases} h_2(x+\omega,\ y+i\beta) - h_2(x, y) = \lambda_3(y) - \lambda(y) + c_3 - c''\omega \\ h_2(x+\omega',\ y+i\beta') - h_2(x, y) = \mu_3(y) - \dfrac{2i\pi x}{\omega} - \mu(y) + c_4 - c''\omega'. \end{cases}$$

D'après (89) on a:

$$\lambda_3(y) - \lambda(y) = \varphi(y)$$
$$\mu_3(y) - \mu(y) = \psi(y).$$

Il vient alors en remplaçant dans (93) $c''\omega$ et $c''\omega'$ par leurs valeurs (91):

$$(94) \qquad \begin{cases} h_2(x+\omega,\ y+i\beta) - h_2(x, y) = \varphi(y) + 2ip_1\pi \\ h_2(x+\omega',\ y+i\beta') - h_2(x, y) = \psi(y) - \dfrac{2i\pi}{\omega}\left(x + \dfrac{\omega}{2}\right) - 2iq_1\pi. \end{cases}$$

Prenons la fonction entière dont le logarithme est $h_2(x, y)$:

$$g_2(x, y) = e^{h_2(x, y)}$$

et qui est liée à $g_1(x, y)$ par la relation:

$$g_2(x, y) = g_1(x, y)\, e^{-c''x - X_2(y)}.$$

Cette fonction satisfait aux identités:

$$(95) \qquad \begin{cases} g_2(x, y + 2i\pi) = g_2(x, y) \\ g_2(x+\omega,\ y+i\beta) = e^{\varphi(y)} g_2(x, y) \\ g_2(x+\omega',\ y+i\beta') = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega}{2}\right) + \psi(y)} g_2(x, y) \end{cases}$$

Enfin la fonction entière

$$g_3(x, y) = g_2\left(x - \frac{\omega}{2}, y\right)$$

satisfait aux identités:

$$(96) \quad \begin{cases} g_3(x, y + 2i\pi) = g_3(x, y) \\ g_3(x + \omega, y + i\beta) = e^{\varphi(y)} g_3(x, y) \\ g_3(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) - \frac{2i\pi x}{\omega}} g_3(x, y) \end{cases}$$

dans lesquelles $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions entieres de y choisies arbitrairement sous la seule condition de vérifier les identités (86).

26. Revenons à l'expression d'une fonction méromorphe triplement périodique: on peut, comme nous l'avons vu précédemment la mettre sous forme du quotient de deux fonctions entieres

$$f(x, y) = \frac{G_1(x, y)}{G_2(x, y)}$$

$G_1(x, y)$ et $G_2(x, y)$ satisfaisant toutes les deux aux identités

$$(97) \quad \begin{cases} G_k(x, y + 2i\pi) = G_k(x, y) \\ G_k(x + \omega, y + i\beta) = e^{\varphi(y)} G_k(x, y) \qquad (k = 1, 2) \\ G_k(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) - \frac{2i\pi\mu x}{\omega}} G_k(x, y) \end{cases}$$

avec $\mu > 0$ et la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{\omega} > 0$.

Du dernier résultat que nous avons obtenu, il résulte que $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ peuvent être, dans ces équations, des fonctions entières quelconques satisfaisant aux identités (86), si la fonction méromorphe $f(x, y)$ est elle même quelconque.

De là résulte l'impossibilité, comme nous l'avons vu, de faire disparaître dans tous les cas $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ des équations fonctionnelles (97) en multipliant $G_k(x, y)$ par une fonction entière de x et y se s'annulant pas. Mais il en résulte aussi immédiatement la possibilité d'arriver dans tous les cas à ce résultat en multipliant par une fonction entière *qui s'annule:* Car $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ satisfaisant aux relations (86), il en est de même de $-\varphi(y)$ et $-\psi(y)$. Par conséquent, il existe une fonction entière $g_4(x, y)$ satisfaisant aux identités suivantes:

$$\begin{aligned} &g_4(x, y + 2i\pi) = g_4(x, y) \\ &g_4(x + \omega, y + i\beta) = e^{-\varphi(y)} g_4(x, y) \\ &g_4(x + \omega', y + i\beta') = e^{-\psi(y) - \frac{2i\pi x}{\omega}} g_4(x, y). \end{aligned}$$

Si l'on pose:

$$H_k(x, y) = g_4(x, y) G_k(x, y) \qquad (k = 1, 2)$$

les deux fonctions $H_k(x, y)$ satisferont aux identités:

$$(98) \qquad \begin{cases} H_k(x, y + 2i\pi) = H_k(x, y) \\ H_k(x + \omega, y + i\beta) = H_k(x, y) \\ H_k(x + \omega', y + i\beta') = e^{-\frac{2i\pi(\mu+1)x}{\omega}} H_k(x, y) \end{cases}$$

et la fonction $f(x, y)$ sera égale au quotient $\dfrac{H_1(x, y)}{H_2(x, y)}$.

Il est à remarquer que d'après la façon dont on l'a formé ce quotient n'est pas *irréductible* c'est-à-dire que ses deux termes ont un diviseur commun qui s'annule.

Dans le cas où l'on pourrait obtenir les fonctions $H_k(x, y)$ en multipliant $G_k(x, y)$ par une fonction entiere qui ne s'annule pas, il est clair qu'il serait préférable d'opérer ainsi. Dans les équations (98) on aurait alors μ au lieu de $(\mu + 1)$.

27. Nous devons maintenant rechercher l'expression générale d'une fonction entière de x et y, $H(x, y)$ satisfaisant aux équations fonctionnelles (98), où nous remplacerons $(\mu + 1)$ par ν; ν sera un entier positif quelconque, $\dfrac{\omega'}{\omega}$ ayant toujours sa partie imaginaire positive. Par suite de la première des équations (98), $H(x, y)$ est égale à une série procédant suivant les puissances entières de e^y, les coefficients étant des fonctions entières de x.

Soit donc

$$(99) \qquad H(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) e^{ny}.$$

Par identification dans les deux autres équations (98) il vient, ($\mu + 1$ étant remplacé par ν)

$$(100) \qquad \begin{cases} \Phi_n(x + \omega) = e^{-ni\beta} \Phi_n(x) \\ \Phi_n(x + \omega') = e^{-ni\beta' - \frac{2i\pi\nu x}{\omega}} \Phi_n(x). \end{cases}$$

On voit d'après ces relations que toutes les fonctions $\Phi_n(x)$ sont des fonctions Θ de la variable x, d'ordre ν.

Posons

$$(101) \qquad \Psi_n(x) = e^{\frac{ni\beta}{\omega} x} \Phi_n(x).$$

On aura:

$$(102)\qquad \begin{cases} \Psi_n(x+\omega) = \Psi_n(x) \\ \Psi_n(x+\omega') = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(\nu x + nb)}\Psi_n(x) \end{cases}$$

en posant:

$$(103)\qquad b = \frac{\beta'\omega - \beta\omega'}{2\pi}.$$

Considérons une fonction $\theta(x)$ du premier ordre satisfaisant aux identités:

$$(104)\qquad \begin{cases} \theta(x+\omega) = \theta(x) \\ \theta(x+\omega') = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)}\theta(x) \end{cases}$$

et qui s'annule, comme on sait, pour $x = 0$. Il y a une infinité de fonctions $\theta(x)$ satisfaisant à ces conditions: elles ne diffèrent entre elles que par un facteur constant. Nous en choisirons une arbitrairement, mais prise une fois pour toutes. (Par exemple celle pour laquelle $\theta\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$).

Imaginons maintenant le plan de la variable x divisé en un réseau de parallélogrammes de côtés ω et ω', et appelons P_0 l'un de ces parallélogrammes.

Nous considérerons suivant l'usage que l'un des côtés ω et l'un des côtés ω' de P_0 appartient au parallélogramme P_0, les deux autres côtés ne lui appartenant pas; de telle sorte qu'un point quelconque du plan n'aura qu'un seul homologue appartenant à P_0. La fonction $\Psi_n(x)$ étant d'ordre ν a ν zéros distincts ou non dans le parallélogramme P_0. Nous appelons $a_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots \nu)$, ces ν zéros. Comme ce sont ν points de P_0, il existe un nombre positif C tel que la somme:

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=\nu} a_k^{(n)}$$

a un module inférieur à C pour toutes les valeurs de n de $-\infty$ à $+\infty$. Soit donc

$$|s_n| < C \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty).$$

D'autre part l'expression de $\Psi_n(x)$ s'obtient sous forme de produit à l'aide de $\theta(x)$ par les procédés ordinaires. On trouve ainsi:

$$(105)\qquad \Psi_n(x) = c_n e^{\frac{-2i\pi K_n}{\omega}x} \prod_{k=1}^{k=\nu} \theta(x - a_k^{(n)}) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty)$$

où c_n est une constante et K_n est un entier qui se trouve défini par la relation suivante qui doit nécessairement avoir lieu:

$$nb = K_n\omega' + K'_n\omega - s_n + \nu\frac{\omega}{2}$$

où K'_n est un autre entier.

Remplaçons dans cette relation b par sa valeur (103); elle devient:

$$\frac{n\beta'}{2\pi}\omega - \frac{n\beta}{2\pi}\omega' = K_n\omega' + K'_n\omega - s_n + \nu\frac{\omega}{2}. \tag{106}$$

Les quantités $\frac{n\beta'}{2\pi}$ et $\frac{n\beta}{2\pi}$ sont réelles et nous pouvons poser:

$$\frac{n\beta'}{2\pi} = p'_n + r'_n, \qquad \frac{n\beta}{2\pi} = -p_n - r_n$$

où p_n et p'_n sont deux entiers et r_n, r'_n deux nombres positifs, plus petits que 1.

L'identité (106) devient alors

$$s_n - \nu\frac{\omega}{2} + r'_n\omega + r_n\omega' = (K_n - p_n)\omega' + (K'_n - p'_n)\omega.$$

Le premier membre est donc une somme de multiples de ω et ω'; mais $|s_n| < C$, $|r'_n\omega| < |\omega|$; $|r_n\omega'| < |\omega'|$ et $\nu\frac{\omega}{2}$ une constante indépendante de n. Donc les entiers $K_n - p_n$ et $K'_n - p'_n$ sont, en valeur absolue inférieurs à un nombre positif Q indépendant de n. Nous poserons:

$$K_n = p_n + q_n \text{ avec } |q_n| < Q \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty).$$

Si l'on remplace p_n par sa valeur, il viendra:

$$K_n = -\frac{n\beta}{2\pi} - r_n + q_n, \quad |q_n| < Q. \tag{107}$$

Si dans l'expression (101), nous remplaçons $\Psi_n(x)$ par l'expression (105), nous aurons pour $\Phi_n(x)$ l'expression suivante:

$$\Phi_n(x) = c_n e^{-\frac{2i\pi}{\omega}\left(K_n + \frac{n\beta}{2\pi}\right)x} \prod_{k=1}^{k=\nu} \theta[x - a_k^{(n)}]$$

ou, en tenant compte de (107)

$$\Phi_n(x) = c_n e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(q_n - r_n)x} \prod_{k=1}^{k=\nu} \theta[x - a_k^{(n)}]. \tag{108}$$

Telle est l'expression générale de $\Phi_n(x)$. Pour former une fonction $\Phi_n(x)$ rentrant dans la formule précédente, on voit que l'on peut prendre arbitrairement $(\nu - 1)$ points $a_k^{(n)}$ à l'intérieur de P_0; le $\nu^{\text{ème}}$ point est alors défini à l'intérieur de P_0 d'une façon unique par la condition (106) où K_n et K'_n doivent être deux entiers qui se trouvent par là définis d'une façon unique: car il n'y a pas à l'intérieur de P_0 deux points distincts homologues l'un de l'autre. Ensuite $q_n - r_n$ est donné par (107). Il reste enfin la constante c_n qui peut être prise arbitrairement.

Il nous faut maintenant discuter la convergence de la série qui fournit $H(x, y)$ et voir sous quelles conditions cette série définit une fonction entière de x et y. Nous allons démontrer à cet égard le résultat suivant:

Pour que la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) e^{ny} \tag{109}$$

définisse une fonction entière de x et y, *il faut et il suffit* que la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{ny}$$

soit elle-même une fonction entière de y.

Cette condition est suffisante: car lorsque x reste dans son plan à l'intérieur d'un domaine quelconque D de dimensions finies, dans la formule (108) toutes les valeurs de $\theta[x - a_k^{(n)}]$ ont un module inférieur à un nombre positif fixe puisque tous les $a_k^{(n)}$ appartiennent à P_0; et de plus comme $|q_n| < Q$ et $|r_n| < 1$, le facteur exponentiel reste aussi inférieur à un nombre positif fixe. La condition est donc manifestement suffisante, la série étant uniformement convergente dans tout domaine d'étendue finie pour les deux variables x et y.

Pour montrer qu'elle est nécessaire prenons à l'intérieur de P_0, $\nu + 1$ points distincts x_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu + 1)$ non situés sur le périmètre de P_0 et entourons chacun d'eux d'un petit cercle γ_j de centre x_j, de telle sorte que tous ces cercles soient extérieurs les uns aux autres et tous intérieurs à P_0.

Cela posé, appelons m_j un nombre entier, positif, ou négatif, ou nul pour lequel $\Phi_{m_j}(x)$ n'ait aucun zéro à l'intérieur de γ_j et considérons la série:

$$\Sigma\, \Phi_{m_j}(x_j)\, e^{m_j y} \tag{110}$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs de m_j satisfaisant à la condition précédente. La fonction $\theta(x_j - z)$ où z est une variable, aura son module supé-

rieur à un nombre fixe C_1 lorsque z sera *intérieure* à P_0 et *extérieure* à γ_j. Car à l'intérieur de P_0, $\theta(x_j - z)$ ne s'annule que pour $z = x_j$. D'autre part, toutes les exponentielles

$$e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(q_n - r_n)x_j}$$

ont évidemment un module supérieur à un nombre positif C_2, puisque $|q_n|$ et r_n sont inférieurs à Q.

Donc on aura:

$$|\Phi_{m_j}(x_j)| > |c_{m_j}| C_2 C_1^\nu.$$

La série (110) procédant suivant les puissances entières de e^y ne peut donc être une fonction entière de y que si

$$\sum c_{m_j} e^{m_j y}$$

est une fonction entière de y.

En prenant $j = 1, 2, \ldots (\nu + 1)$ nous mettrons en évidence $(\nu + 1)$ séries définissant des fonctions entières de y. Mais comme $\Phi_n(x)$ n'a que ν zéros dans P_0, il y a au moins, pour chaque valeur de n, un des $\nu + 1$ cercles γ_j qui ne contient aucun zéro de $\Phi_n(x)$; donc chaque terme de la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{ny}$$

figure au moins dans l'une des $(\nu + 1)$ séries:

$$\sum c_{m_j} e^{m_j y}$$

La série $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{ny}$ est, d'après cela, et par un raisonnement très-simple, convergente et définit une fonction entière de y. La condition énoncée est donc bien nécessaire.

Nous ne rechercherons pas ici les autres formes que l'on pourrait donner à l'expression générale de $H(x, y)$. Dans ce qui suit nous laissons de côté les fonctions triplement périodiques les plus générales pour étudier des classes de ces fonctions, possédant des propriétés qui les rapprochent d'une façon remarquable des fonctions abéliennes.

Deuxième partie.

28. Désignons par $f(x, y)$ une fonction méromorphe de x et y de la forme:

$$f(x, y) = \frac{P(x, e^y)}{Q(x, e^y)} \tag{1}$$

où $P(x, e^y)$ et $Q(x, e^y)$ sont des polynômes entiers en e^y, les coefficients étant des fonctions entières de x. De plus on suppose que la fraction est irréductible, c'est-à-dire que les deux termes ne sont pas divisibles tous les deux par une même fonction entière de x et de y qui s'annule. Ceci revient à dire 1° que $P(x, e^y)$ et $Q(x, e^y)$ n'ont pas en e^y de racine commune quelle que soit la valeur de x; 2° que tous les coefficients, pris ensemble, des deux polynômes P et Q n'ont aucun zéro commun.

Nous supposons que $f(x, y)$ est triplement périodique avec les trois systèmes de périodes *non exceptionnels* (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3). On pourrait prendre pour l'un de ces systèmes $(0, 2i\pi)$ mais nous ne le faisons pas pour la généralité de ce qui suit.

Nous poserons, en désignant par p et q les degrés respectifs de P et de Q en e^y:

$$(2)\qquad \begin{cases} P(x, e^y) = \sum_{n=1}^{n=p} f_n(x)\, e^{ny} \\[2ex] Q(x, e^y) = \sum_{m=1}^{m=q} \varphi_m(x)\, e^{my}. \end{cases}$$

En écrivant que (a_1, b_1), (a_2, b_2) et (a_3, b_3) sont des systèmes de périodes pour $f(x, y)$, on obtient les identités suivantes, en ayant égard à l'irréductibilité de $\frac{P}{Q}$

$$(3)\qquad P[x + a_k,\ e^{y+b_k}] = e^{h_k(x)} P(x, e^y) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$(4)\qquad f_n(x + a_k) = e^{h_k(x) - nb_k} f_n(x) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3 \\ n = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$$

où $h_k(x)$ $(k = 1, 2, 3)$ sont trois fonctions entières de x. Si l'une des fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots p)$ ne s'annulait pour aucune valeur de x, ses trois entiers caractéristiques correspondant à a_1, a_2, a_3 pris deux à deux seraient nuls. Or il ressort des identités (3) et (4) que ces entiers caractéristiques sont les mêmes que les trois entiers caractéristiques de $f(x, y)$ pour (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3). Comme les trois systèmes de périodes ne sont pas exceptionnels $f(x, y)$ serait une constante, comme ayant ses trois entiers caractéristiques nuls. Donc chacune des fonctions $f_n(x)$ s'annule pour quelque valeur de x; si deux des quantités a_1, a_2, a_3 avaient un rapport réel et incommensurable toutes les fonctions $f_n(x)$ seraient par suite nulles identiquement. D'autre part les rapports de a_1, a_2, a_3 pris deux à deux ne peuvent pas être *tous* réels commensurables. Car on aurait:

(5) $$a_1 = m_1 a, \quad a_2 = m_2 a, \quad a_3 = m_3 a$$

m_1, m_2 et m_3 étant trois entiers non tous nuls et a une constante. Or il résulte de (5), l'égalité suivante:

$$m_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + m_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + m_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

c'est-à-dire (Introduction paragraphe 6): $m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + m_3 \delta_3 = 0$ et les trois systèmes seraient exceptionnels, contrairement à l'hypothèse.

Comme conclusion: on voit qu'il y a nécessairement deux des quantités a_1, a_2, a_3 dont le rapport est imaginaire. Si nous supposons, pour fixer les idées, le rapport $\frac{a_1}{a_2}$ imaginaire on voit alors sans difficulté qu'en multipliant toutes les fonctions $f_n(x)$ et $\varphi_m(x)$ par une même fonction entière de x, ne s'annulant pas, et convenablement choisie, tous les produits obtenus seront des fonctions Θ de la seule variable x, aux périodes a_1 et a_2; $f(x, y)$ est ainsi mise, sous forme d'une fraction rationnelle en e^y, les coefficients étant des fonctions Θ de la seule variable x. On voit en outre qu'il existe entre a_1, a_2, a_3 une relation de la forme:

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = 0$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant des entiers non tous nuls et premiers entre eux.

29. Cette remarque faite, désignons par $\varphi(x, y)$ une fonction méromorphe, triplement périodique, les trois systèmes de périodes non exceptionnels étant $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Nous dirons que cette fonction est semi-rationnelle, si il existe une substitution linéaire

(6) $$\begin{cases} x = A X + B Y \\ y = A' X + B' Y \end{cases}$$

telle que $\varphi(x, y)$ se réduise, par cette substitution, à une fraction rationnelle en e^Y, les coefficients étant des fonctions entières de X seul.

Désignons par $\Phi(X, Y)$ ce que devient $\varphi(x, y)$ par la substitution (6) et soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) les trois systèmes de périodes de cette fonction qui correspondent respectivement à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ de telle sorte qu'on a:

$$2i\pi = A' a_1 + B' b_1$$

$$i\beta = A' a_2 + B' b_2$$

$$i\beta' = A' a_3 + B' b_3.$$

D'après ce qui précède, il y a deux des nombres a_1, a_2, a_3 dont le rapport est imaginaire: donc B' *ne peut pas être nul.* Posons:

$$(7) \qquad \begin{aligned} X &= X_1 \\ Y &= C X_1 + Y_1 \end{aligned}$$

C étant une constante quelconque; la fonction $\Phi(X, Y)$ devient par cette substitution $\Phi_1(X_1, Y_1)$ et il est manifeste que cette fonction sera aussi une fraction rationnelle en e^{Y_1}, puisque $e^Y = e^{CX_1} . e^{Y_1}$. De (6) et (7) on conclut:

$$\begin{aligned} x &= (A + B C) X_1 + B Y_1 \\ y &= (A' + B'C) X_1 + B' Y_1 . \end{aligned}$$

Comme $B' \neq 0$, on peut choisir C de façon que:

$$A' + B'C = 0$$

et l'on aura ainsi:

$$(8) \qquad \begin{aligned} x &= A_1 X_1 + B Y_1 \\ y &= B' Y_1 \end{aligned}$$

en posant pour abréger

$$A_1 = \frac{AB' - BA'}{B'} \neq 0 .$$

Désignons par (a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2) (a'_3, b'_3) les trois systèmes de périodes qui pour (X_1, Y_1) correspondent à $(0, 2 i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Il y a, d'après ce qui précède, une relation de la forme

$$(9) \qquad \mu_1 a'_1 + \mu_2 a'_2 + \mu_3 a'_3 = 0$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois entiers premiers entre eux.

Résolvons les équations (8) par rapport à X_1 et Y_1:

$$(10) \qquad \left| \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{A_1}\left(x - \frac{BA_1}{B'} y\right) \\ Y_1 &= \frac{y}{B'} \end{aligned} \right.$$

et considérons le système de périodes $(\mu_2\omega + \mu_3\omega', 2\mu_1 i\pi + \mu_2 i\beta + \mu_3 i\beta')$ pour x et y, auquel correspond pour X_1, Y_1 le système de périodes $(0, \mu_1 b'_1 + \mu_2 b'_2 + \mu_3 b'_3)$, à cause de la relation (9). On aura donc:

$$0 = \mu_2\omega + \mu_3\omega' - \frac{BA_1}{B'}(2\mu_1 i\pi + \mu_2 i\beta + \mu_3 i\beta').$$

Les équations (10) deviennent ainsi:

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{A_1}\left(x - \frac{\mu_2\omega + \mu_3\omega'}{i(2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta')}\,y\right) \\
Y_1 &= \frac{y}{B'}\,.
\end{aligned}
$$

Posons:

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
X_2 &= x - \frac{\mu_2\omega + \mu_3\omega'}{i(2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta')}\,y \\
Y_2 &= \frac{2\pi}{2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta'}\,y\,.
\end{aligned}
$$

On aura ainsi:

$$
(13) \qquad
\begin{aligned}
X_1 &= A_3 X_2 \\
Y_1 &= B_3 Y_2
\end{aligned}
$$

A_3 et B_3 étant deux constantes.

La fonction $\Phi(A_3X_2,\ B_3Y_2)$ s'exprimera comme fonction rationnelle en $e^{B_3Y_2}$, comme $\Phi(X_1,\ Y_1)$ en e^{Y_1}. Or au système de périodes $(\mu_2\omega + \mu_3\omega',\ 2\mu_1 i\pi + \mu_2 i\beta + \mu_3 i\beta')$ pour x et y correspond pour X_2, Y_2 le système de périodes $(0,\ 2i\pi)$. Donc, il est clair que la fonction $\Phi(A_3X_2,\ B_3Y_2)$ pourra *finalement* s'exprimer comme fonction rationnelle en e^{Y_2}.

En résumé, si la fonction $\varphi(x, y)$ est *semi-rationnelle* on pourra la ramener à la *forme* semi-rationnelle par une substitution linéaire de la forme (12). Remarquons que dans la substitution (12) on peut sans inconvénient pour le résultat final, changer les signes des trois nombres μ_1, μ_2 et μ_3 à la fois. Donc la quantité $2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta'$ qui est différente de zéro peut être supposée positive, ce que nous ferons:

$$2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta' > 0.$$

Les entiers μ_1, μ_2 et μ_3 étant premiers entre eux prenons des entiers λ_1, λ_2, λ_3, ν_1, ν_2, ν_3 tels que

$$
\begin{vmatrix}
\mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\
\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\
\nu_1 & \nu_2 & \nu_3
\end{vmatrix} = 1
$$

et considérons pour x et y les trois systèmes de périodes fournis par la transformation dont le déterminant est le précédent. Il leur correspondra pour (X_2, Y_2) les trois systèmes de périodes $(0,\ 2i\pi)$, $(\omega_2,\ i\beta_2)$, $(\omega'_2,\ i\beta'_2)$ qui auront la forme normale, puisque l'on a:

$$\beta_2 = \frac{2\pi(2\lambda_1\pi + \lambda_2\beta + \lambda_3\beta')}{2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta'}$$

$$(14) \qquad \beta'_2 = \frac{2\pi(2\nu_1\pi + \nu_2\beta + \nu_3\beta')}{2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta'}.$$

La fonction $\Phi_1(A_3X_2, B_3Y_2)$ étant rationnelle en e^{Y_2}, on voit que ses entiers caractéristiques relatifs à $(0, 2i\pi)$, $(\omega_2, i\beta_2)$ d'une part, et $(0, 2i\pi)$, $(\omega'_2, i\beta'_2)$ d'autre part, sont nuls. Si nous appelons $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$ les entiers caractéristiques de $\varphi(x, y)$ relatifs à $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$, nous aurons en appliquant les formules données dans l'introduction pour le calcul des entiers caractéristiques après une transformation

$$m_{1,2}(\mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2) + m_{2,3}(\mu_2\lambda_3 - \lambda_2\mu_3) + m_{3,1}(\mu_3\lambda_1 - \lambda_3\mu_1) = 0$$

$$m_{1,2}(\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2) + m_{2,3}(\mu_2\nu_3 - \nu_2\mu_3) + m_{3,1}(\mu_3\nu_1 - \nu_3\mu_1) = 0.$$

On en déduit immédiatement que $m_{1,2}$, $m_{2,3}$ et $m_{3,1}$ sont proportionnels à μ_3, μ_1 et μ_2; donc que μ_1, μ_2 et μ_3, qui sont premiers entre eux, sont les quotients de $m_{2,3}$, $m_{3,1}$, $m_{1,2}$ par leur plus grand commun diviseur pris avec un signe tel que $2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta' > 0$, d'après notre convention. De la resulte cette conséquence: si la fonction $\varphi(x, y)$ est semi-rationnelle, elle peut être ramenée à *la forme* semi-rationnelle par *une* et *une seule* des substitutions de la forme (12), où μ_1, μ_2, μ_3 sont premiers entre eux et où $2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta' > 0$.

Inversement, si nous formons, comme nous avons vu qu'on peut le faire, d'une infinité de façons, une fraction rationnelle en e^{Y_2} ayant pour coefficients des fonctions Θ *convenablement choisies* de X_2 nous aurons une fonction triplement périodique aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, $(\omega'_2, i\beta'_2)$. Si on l'exprime en x et y, par la substitution inverse de (12), elle se transforme en une fonction méromorphe $\varphi(x, y)$ aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$ et $(\omega', i\beta')$ (car la transformation effectuée sur les périodes était du premier ordre) et qui sera *semi-rationnelle.*

Si nous considérons comme appartenant à une même classe toutes les fractions rationnelles en e^{Y_2} que l'on peut ainsi former et admettant les trois systèmes de périodes indiqués plus haut, on voit que parmi les fonctions $\varphi(x, y)$ semi-rationnelles aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ il y a une *infinité de classes* correspondant à tous les choix possibles de μ_1, μ_2, μ_3 qui sont trois entiers quelconques, premiers entre eux et tels que

$$2\mu_1\pi + \mu_2\beta + \mu_3\beta' > 0.$$

Toutes ces classes sont distinctes, car une même fonction $\varphi(x, y)$ ne peut pas être ramenée par deux substitutions linéaires (12) distinctes, à la forme semi-

rationnelle, c'est-à-dire ne peut pas appartenir à la fois à deux des classes que nous venons de définir.

30. Les fonctions semi-rationnelles qui appartiennent à une même classe possèdent des propriétés qui les rapprochent d'une façon remarquable des fonctions abéliennes de deux variables. Il est très-facile de mettre en evidence ces propriétés.

Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ ayant toujours sa partie imaginaire positive, nous pouvons former deux fonctions entières de x, $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ satisfaisant aux identités:

$$(15)\qquad \begin{cases} \theta_1(x+\omega) = e^{-i\beta}\theta_1(x) \\ \theta_1(x+\omega') = e^{-\frac{2i\pi}{\omega}x - i\beta'}\theta_1(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_2(x+\omega) = \theta_2(x) \\ \theta_2(x+\omega') = e^{-\frac{2i\pi x}{\omega}}\theta_2(x). \end{cases}$$

La fonction u de x et y définie par l'égalité

$$(16)\qquad u = \frac{\theta_1(x)e^y}{\theta_2(x)}$$

sera une fonction semi-rationelle aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Posons en outre:

$$(17)\qquad \begin{aligned} v &= \frac{\partial}{\partial x}(\log u) \\ w &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log u) = \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

La fonction v sera une fonction elliptique de la seule variable x, aux périodes ω et ω' et avec deux pôles simples de résidus ± 1 dans un parallélogramme de côtés ω et ω'. Elle sera donc liée à sa dérivée w par une relation de la forme

$$(18)\qquad w^2 = R(v)$$

où $R(v)$ est un polynôme du quatrième degré en v, dont le coefficient du terme en v^4 est égal à 1.

Considérons u, v et w comme les coordonnées cartésiennes d'un point d'un espace à trois dimensions. La relation (18) définit un cylindre et si u_1, v_1, w_1 est un *point* de ce cylindre les équations:

$$
(19)\qquad \begin{aligned} u(x, y) &= u_1 \\ v(x) &= v_1 \\ w(x) &= w_1 \end{aligned}
$$

admettent en x et y les systèmes de solutions suivants: les deux dernières équations ne sont vérifiées que par une valeur de x, soit x_1, et par celles qui s'en déduisent par l'addition de multiples de ω et ω'. En faisant ensuite $x = x_1 + m\omega + n\omega'$ dans la première équation, on obtient facilement pour y des valeurs de la forme:

$$
y = y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2\, pi\pi
$$

m, n et p étant des entiers quelconques. Les équations (19) n'admettent en (x, y) qu'un seul système de solutions abstraction faite des multiples des périodes conjuguées. D'ailleurs ce système de solutions est donné par les formules suivantes, en appleant u_0, v_0, w_0 un point du cylindre et (x_0, y_0) un système de valeurs correspondant pour x et y, et en supprimant l'indice de u_1, v_1, w_1:

$$
(20)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \int_{v_0,\, w_0}^{v,\, w} \frac{dv}{w} \\ y &= y_0 + \int_{u_0,\, v_0,\, w_0}^{u,\, v,\, w} \frac{du}{u} - \frac{vdv}{w}. \end{aligned}
$$

Les intégrales précédentes peuvent être considérées comme des intégrales de différentielles totales exactes rationelles en u, v, w attachées à la surface cylindrique (18). La première de ces intégrales est de première espèce; la seconde n'admet que des singularités logarithmiques simples, c'est-à-dire non superposées à des singularités polaires; ou encore, si l'on considère une courbe algébrique quelconque tracée sur la surface du cylindre, la deuxième intégrale est pour cette courbe une intégrale abélienne n'ayant que des singularités logarithmiques simples. On peut facilement voir, mais cela ne nous servira pas dans la suite, que l'intégrale qui donne y a comme courbes logarithmiques: 1° la section $u = 0$ du cylindre avec résidu égal à $+1$; 2° une droite dans le plan de l'infini $\left(\text{celle qui correspond à } \frac{w}{v^2} = 1\right)$ avec résidu égal à -1; 3° une droite dans le plan de l'infini $\left(\text{celle qui correspond à } \frac{w}{v^2} = -1\right)$ avec résidu égal à -3; 4° le point conique à l'infini du cylindre qui peut être considéré comme une courbe

logarithmique réduite à un point, tout au moins au point de vue de la représentation paramétrique de la surface.

Nous nous bornons à énoncer ces propriétés que nous n'emploierons pas.

Considérons une fonction semi-rationnelle appartenant à la même classe que u, v et w. Cette fonction $f(x, y)$ pourra être mise sous la forme:

$$(21) \qquad f(x, y) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{n=p} \varphi_n(x) e^{ny}}{\sum\limits_{m=1}^{m=q} \psi_m(x) e^{my}}$$

où $\varphi_n(x)$ et $\psi_m(x)$ satisferont aux identités:

$$\varphi_n(x+\omega) = e^{-ni\beta} \varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots p)$$

$$\varphi_n(x+\omega') = e^{\frac{-2i\mu\pi x}{\omega} - ni\beta'} \varphi_n(x)$$

où μ est un entier. Les $\psi_m(x)$ satisfont aux mêmes identités, sauf le changement de n en m.

Prenons une fonction entière $X(x)$ satisfaisant à

$$X(x+\omega) = X(x)$$

$$X(x+\omega') = e^{\frac{-2i\mu\pi x}{\omega}} X(x).$$

L'expression

$$\frac{\varphi_n(x) e^{ny}}{u^n X(x)} = \frac{\varphi_n(x) \theta_2^n(x)}{X(x) \theta_1^n(x)}$$

est une fonction elliptique de la seule variable x, aux périodes ω et ω', comme on peut s'en assurer facilement. Elle est donc une fonction rationnelle de v et w. Par suite l'expression $\frac{\varphi_n(x) e^{ny}}{X(x)}$ est une fonction rationnelle de u, v et w. On en conclut immédiatement en divisant dans l'expression (21) tous les coefficients $\varphi_n(x)$, $\psi_m(x)$ de e^y par $X(x)$ que $f(x, y)$ est elle-même une fonction rationnelle de u, v et w. Donc toutes les fonctions semi-rationnelles de la classe considérée sont des fonctions rationnelles de u, v et w, et réciproquement. Si U, V et W désignent trois quelconques de ces fonctions, on voit qu'elles sont liées par une relation algébrique; exceptionnellement elles peuvent être liées par deux relations algébriques. Supposons U, V, W liées par une seule relation algébrique et soit

$$(22) \qquad R(U, V, W) = 0$$

cette relation; nous la considérons comme définissant une surface S qui se déduit du cylindre (18) par une transformation rationnelle: à un point quelconque du cylindre correspond un point de S; à un point de S correspondent un nombre déterminé ν de points du cylindre. Par suite à un système de valeurs de U, V, W non particulier satisfaisant à (22) correspondent ν systèmes de valeurs de x et y aux multiples près des périodes. Si la transformation par laquelle on passe du cylindre à la surface S est bi-rationnelle, alors $\nu = 1$ et les expressions (20) données pour x et y se réduisent, en fonction de (U, V, W) à des intégrales de différentielles totales relatives à la surface S. Enfin, dans ce cas, toutes les fonctions semi-rationnelles de la même classe s'expriment rationnellement en U, V, W et d'ailleurs, toute fonction rationnelle de U, V, W appartient à la classe considérée.

Si l'on compare ces propriétés à celles des fonctions abéliennes, on remarque immédiatement l'analogie qui ressort de ce rapprochement avec les dégénérescences des fonctions elliptiques en fonctions trigonométriques et avec la dégénérescence correspondante de l'intégrale de première espèce en une intégrale à points singuliers logarithmiques simples.

L'analogie se trouve encore plus complète par le théorème que nous démontrons plus loin et dont nous allons donner l'énoncé.

Remarquons que entre une fonction $f(x, y)$ semi-rationnelle aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ et ses dérivées du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ il existe nécessairement une relation algébrique, puisque ces trois fonctions appartiennent manifestement à une même classe.

Il est naturel de se demander si cette propriété est pour les fonctions méromorphes triplement périodiques aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ caractéristique des fonctions semi-rationnelles, comme pour les fonctions méromorphes d'une variable *simplement* périodiques, la propriété analogue est caractéristique des fonctions trigonometriques. La réponse est affirmative et la fin de ce Mémoire est consacrée à la démonstration du théorème suivant:

Si une fonction méromorphe, $f(x, y)$ admet les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ et n'en admet *aucun autre* distinct des précédents, si, de plus, cette fonction $f(x, y)$ est liée à ses dérivées partielles du premier ordre par une relation algébrique, on peut en conclure que $f(x, y)$ est semi-rationnelle, c'est-à-dire que, en remplaçant les variables x est y à l'aide d'une substitution linéaire convenablement choisie de la forme (12) par des variables X et Y, $f(x, y)$ sera une fonction rationnelle de e^Y.

31. Soit donc $f(x, y)$ une fonction méromorphe de x et y admettant les trois systèmes de périodes non exceptionnels $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$; on suppose que la fonction $f(x, y)$ est liée à ses deux dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ par une relation algébrique:

$$F\left[f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = 0. \tag{1}$$

où F est un polynôme entier en $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On suppose bien entendu cette relation irréductible.

Nous poserons pour abréger l'écriture

$$z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

La relation (1) s'écrira donc:

$$F(z, p, q) = 0. \tag{2}$$

Dans ce qui suit nous utiliserons pour simplifier les raisonnements et le langage les résultats connus de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre ainsi que les expressions usitées dans cette théorie telles que: surface intégrale, caractéristiques, élément (x, y, z, p, q) d'une intégrale etc.

Nous pourrons supposer que la fonction $z = f(x, y)$ ne satisfait pas à une équation de même forme que (2) et de degré total moindre en z, p et q. Car sans cela nous remplacerions l'équation (2) par l'équation de degré moindre.

Il résulte de cette hypothèse que $z = f(x, y)$ n'est pas une intégrale singulière de l'équation (2); car sans cela elle satisferait à chacune des équations $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$ de degré moindre que $F = 0$, et dont l'une au moins n'est pas une identité si z ne se réduit pas à une constante.

L'intégrale considérée n'étant pas singulière, si x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 est un *élément* de l'intégrale pour lequel tous les dénominateurs des équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{-dp}{p\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dq}{q\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{3}$$

ne sont pas nuls, toute la caractéristique issue de cet élément initial appartiendra à l'intégrale.

Nous allons étudier tout d'abord un cas particulier afin d'en débarrasser la démonstration qui suivra pour le cas général.

Nous supposons que l'intégrale $z = f(x, y)$ satisfait à l'équation

$$p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = 0 \tag{4}$$

en même temps qu'à l'équation (2).

Si $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ est un élément de l'intégrale pour lequel tous les dénominateurs de (3) ne sont pas nuls et pour lequel en outre p_0 et q_0 ne sont pas tous les deux nuls, on aura pour la caractéristique correspondante:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0} \tag{5}$$

(même si $\frac{\partial F}{\partial z}$ était nulle identiquement).

En outre pour la caractéristique considérée, on a

$$z = z_0.$$

Puis, en combinant (4) et (5) on aura

$$p_0\frac{\partial F}{\partial p} + q_0\frac{\partial F}{\partial q} = 0; \tag{6}$$

les deux premiers rapports de (3) donnent alors:

$$p_0 dx + q_0 dy = 0$$

d'où enfin

$$p_0 x + q_0 y = p_0 x_0 + q_0 y_0. \tag{7}$$

Comme la caractéristique définie par les équations précédentes appartient à l'intégrale $z = f(x, y)$, on voit que l'équation

$$z_0 = f(x, y) \tag{8}$$

est vérifiée comme conséquence de l'équation (7).

Mais il est impossible que (8) soit vérifiée, comme nous l'avons vu, pour une valeur constante de y, quelle que soit x (paragraphe 9); donc p_0 dans l'équation (7) est différent de zéro. De l'existence nécessaire des augments conjugués pour une branche principale on conclut alors, en écrivant d'abord l'équation (7) sous la forme,

$$x = -\frac{q_0}{p_0}y + \frac{p_0 x_0 + q_0 y_0}{p_0} \tag{9}$$

que $-\dfrac{q_0}{p_0}$ est de la forme

$$\frac{q_0}{p_0} = \frac{m\omega + n\omega'}{i(m\beta + n\beta' + 2p\pi)}$$

m, n et p étant trois entiers premiers entre eux. Comme l'élément $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ est un élément quelconque de l'intégrale $z = f(x, y)$, on en conclut que le rapport $\dfrac{q}{p}$ est constant et égal à $\dfrac{m\omega + n\omega'}{i(m\beta + n\beta' + 2p\pi)}$ et par suite que $f(x, y)$ n'est fonction que de $x - \dfrac{m\omega + n\omega'}{i(m\beta + n\beta' + 2p\pi)}y$.

Si l'on effectue la substitution linéaire

$$X = x - \frac{m\omega + n\omega'}{i(m\beta + n\beta' + 2p\pi)}y$$

$$Y = \frac{2\pi}{m\beta + n\beta' + 2p\pi}y$$

on voit, en raisonnant comme au paragraphe 29 que $f(x, y)$ se réduit à une fonction elliptique de la seule variable X; elle est donc bien une fonction semi-rationnelle, (mais qui ne dépend pas de e^Y).

32. Si nous revenons au cas général nous supposons que l'équation

$$p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

n'est pas vérifiée par la fonction $z = f(x, y)$. Nous supposerons en outre que pour cette fonction le rapport $\dfrac{p}{q}$ n'est pas constant, sans quoi on retomberait encore sur la conclusion précédente.

En remplaçant dans $p\dfrac{\partial F}{\partial p} + q\dfrac{\partial F}{\partial q}$, z, p et q par leurs expressions $f(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en x et y, on aura une identité de la forme

$$p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = \psi(x, y)$$

où $\psi(x, y)$ sera une fonction méromorphe, bien déterminée, aux trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$, non nulle identiquement.

D'une façon analogue posons:

$$\frac{p}{q} = \varphi(x, y)$$

et considérons le système des deux équations:

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = u \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

où u est une valeur donnée arbitrairement. Les fonctions $\varphi(x, y) - u$ et $\psi(x, y)$ ne peuvent admettre en facteur commun une fonction entière de x et y, $g(x, y)$ dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ que pour un nombre limité de valeurs exceptionnelles de u, puisque le numérateur de la fonction méromorphe $\psi(x, y)$ n'a qu'un nombre limité de *facteurs irréductibles relativement à ces périodes* (paragraphe 20). Le nombre de ces valeurs exceptionnelles de u, est au plus égal au nombre des facteurs *irréductibles* de $\psi(x, y)$. D'ailleurs $\varphi(x, y) - u$ et $\psi(x, y)$ admettant les trois systèmes de périodes, ne peuvent avoir de facteur commun sans avoir un facteur commun tel que $g(x, y)$.

De la même façon $\varphi(x, y) - u$ ne peut avoir de facteur commun avec l'une des fonctions $\frac{1}{z}$, q, ou $\frac{1}{q}$ que pour un nombre limité de valeurs exceptionnelles de u. A supposer qu'il existe quelques valeurs exceptionnelles de cette nature, nous désignerons par E_2 leur ensemble, en y comprenant celles qui sont relatives à $\psi(x, y)$ et $\varphi(x, y) - u$. Ceci posé, attribuons à u une valeur n'appartenant pas à l'ensemble E_2 et désignons par M_1 une *multiplicité simple de zéros* de la fonction $\varphi(x, y) - u$. Nous appelons *multiplicité simple de zéros*, une multiplicité formant un seul *continuum analytique* (de telle sorte que l'on peut passer de l'un quelconque de ses zéros à un autre par continuation analytique). Il y a au moins *une* telle multiplicité puisque $\frac{p}{q} = \varphi(x, y)$ n'est pas une constante par hypothèse (paragraphe 10).

La valeur u n'appartenant pas à E_2, la multiplicité M_1 ne peut appartenir aux zéros d'aucune des fonctions $\psi(x, y)$, $\frac{1}{z}$, q, ou $\frac{1}{q}$. On peut donc prendre sur la multiplicité M_1 un point (x_1, y_1) pour lequel $q_1 = \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y_1}$ sera fini et différent de zéro; pour lequel $z_1 = f(x_1, y_1)$ sera fini; pour lequel $p_1 = u q_1$ sera fini; et enfin pour lequel $\psi(x_1, y_1) \neq 0$. Nous avons ainsi un élément $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ de l'intégrale $z = f(x, y)$, composé de valeurs finies et tel que

$$p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + q_1 \frac{\partial F}{\partial q_1} \neq 0 \quad \text{et} \quad q_1 \neq 0.$$

En outre on peut supposer que (x_1, y_1) n'est un point d'indétermination pour aucune des fonctions z, p, q, de telle sorte que z_1, p_1, q_1, sont définis sans ambiguité.

L'élément $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ est l'élément initial d'une caractéristique bien déterminée par les équations (3) où z peut être prise comme variable indépendante puisque le dénominateur de dz a une valeur initiale non nulle.

Les deux derniers rapports des équations (3) donnent:

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = u. \tag{11}$$

L'équation $F(z, p, q) = 0$ donne ensuite q en fonction de z:

$$F(z, uq, q) = 0. \tag{12}$$

Les trois premiers rapports des équations (3) où l'on remplace p par uq donnent alors:

$$dx = P(z, q, u)dz$$
$$dy = Q(z, q, u)dz$$

où P et Q sont des fractions rationnelles en z, q et u. u est ici une constante et z et q sont liées par la relation algébrique (12). Donc x et y sont données par des intégrales abéliennes attachées à la *courbe* (12), intégrales qui sont prises à partir du *point* (z_1, q_1). Soit donc:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} P(z, q, u)\,dz \\ y &= y_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} Q(z, q, u)\,dz. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Les deux intégrales abéliennes de ces formules sont attachées à la relation (12). Mais il peut se faire que cette *courbe* se décompose, même pour une valeur non particulière de u. Tout d'abord, si elle renferme en facteur une certaine puissance de q, nous supprimerons ce facteur, car la valeur initiale q_1 est différente de zéro. Soit n le nombre des facteurs entiers irréductibles en lesquels se décompose alors la relation (12) pour une valeur non particulière de u et soit:

$$R_1(z, q)\, R_2(z, q) \ldots\ldots R_n(z, q) = 0$$

cette décomposition où les R sont des polynômes entiers en z et q. On suppose bien entendu que $F(z, p, q) = 0$ est une relation algébrique irréductible. Dès lors les facteurs $R_1, R_2, \ldots R_n$ sont distincts si u est quelconque. De plus un quelconque de ces facteurs peut s'échanger en l'un quelconque des autres facteurs (à un facteur constant près) lorsque u varie en décrivant un circuit fermé convenablement choisi. Pour le montrer, prenons un système de valeurs (z', q') annulant le seul facteur R_1 et un système de valeurs (z'', q'') annulant le seul facteur R_2. Si l'on pose $p' = uq'$, $p'' = uq''$ les deux systèmes de valeurs (z', p', q') et (z'', p'', q'') vérifient la relation $F(z, p, q) = 0$. Comme cette relation est irréductible on peut imaginer que le *point* (z, p, q) décrit une ligne joignant sur la surface $F(z, p, q) = 0$ le point (z', p', q') au point (z'', p'', q'') sans que q s'annule dans cette variation. La variable $u = \frac{p}{q}$ décrira un circuit fermé puisque $\frac{p'}{q'} = \frac{p''}{q''}$ et il est clair que le facteur R_1 sera devenu le facteur R_2 (à un facteur constant près).

Les n facteurs R pouvant ainsi s'échanger entre eux nous pourrons les prendre sous la forme:

$$R_k(z, q) = R(z, q, u, \gamma_k) \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

où γ_k est l'une des déterminations d'une fonction algébrique de u, convenablement choisie, et admettant n déterminations permutables entre elles et où R est un polynôme entier en z, q, u, γ_k.

Pour certaines valeurs particulières de u, il pourrait arriver que deux des n facteurs précédents soient proportionnels ou encore que l'un d'eux soit décomposable. Ces valeurs exceptionnelles de u sont évidemment en nombre fini: nous les ajouterons à l'ensemble E_2 et nous appellerons E_3 l'ensemble résultant. Nous supposons actuellement que u n'appartient pas à l'ensemble E_3.

Dans les formules (13) les intégrales sont attachées à celle des courbes

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0$$

qui contient le *point* initial z_1, q_1 et il n'y a qu'une seule de ces courbes qui contient ce point. Car, sans cela, le point (z_1, q_1) serait un point double pour la courbe totale (12) et par suite on aurait:

$$\frac{\partial}{\partial q}[F(z_1, uq_1, q_1)] = 0$$

ou en remarquant que $uq_1 = p_1$:

$$p_1 \frac{\partial F(z_1, p_1, q_1)}{\partial p_1} + q_1 \frac{\partial F(z_1, p_1, q_1)}{\partial q_1} = 0.$$

Or cette égalité n'a pas lieu, d'après le choix du point (x_1, y_1) sur M_1.

Nous supposerons pour fixer les idées que c'est à la courbe $k = 1$ que se rapportent les intégrales des formules (13).

La caractéristique définie par les formules données ci-dessus et issue de l'élément $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ appartient tout entière à l'intégrale $z = f(x, y)$. Donc on aura pour tous les éléments de cette caractéristique:

$$(14) \qquad \frac{p}{q} = \varphi(x, y) = u, \quad z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Les valeurs de x et y fournies par les équations (13) vérifient donc la relation $\varphi(x, y) - u = 0$. Donc les formules (13) donnent les expressions d'un point (x, y) de la multiplicité M_1 sous forme d'intégrales abéliennes; on peut dire que ce sont les équations de la multiplicité M_1. Comme M_1 est l'une quelconque des *multiplicités simples de zéros* de $\varphi(x, y) - u$, on voit que toutes ces multiplicités sont données par des intégrales abéliennes attachées à l'une des courbes $R = 0$, avec un système de valeurs initiales convenablement choisies pour x, y, z, q.

Il existe une fonction entière de x et y, $g_1(x, y)$ admettant pour zéros tous les points de M_1 et *n'admettant pas d'autres zéros*. Cela résulte immédiatement des théorèmes généraux, en remarquant que l'on sait que M_1 appartient déjà, comme multiplicité de zéros, à une fonction entière de x et y, à savoir au numérateur de la fonction méromorphe $\varphi(x, y) - u$.

Si nous considérons les différentes fonctions entières $g_1(x + m\omega + n\omega'$, $y + mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi)$ obtenues en donnant à m, n et p toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles, chacune de ces fonctions admet comme zéros une seule multiplicité simple qui se déduit de M_1 par la *translation* $(m\omega + n\omega', mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi)$ dans l'hyperespace à quatre dimensions représentatif des variables x et y. Les multiplicités obtenues par ces translations peuvent être ou bien distinctes de M_1, ou bien confondues avec M_1. Nous considérerons toutes celles qui sont *distinctes entre elles*, en ne prenant qu'une fois chacune d'elles; nous avons ainsi un nombre de multiplicités qui pourra être infini, ou bien fini ou même égal à 1: nous ne pouvons rien affirmer à cet égard. Toutes ces multiplicités distinctes font évidemment partie des zéros de la fonction $\varphi(x, y) - u$ et par conséquent, nous pouvons former une fonction entière $G_1(x, y)$ admettant pour zéros toutes ces multiplicités distinctes et pas d'autres zéros. Les zéros de $G_1(x, y)$ admettent évidemment les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. De plus $G_1(x, y)$ est *irréductible relativement à ces trois systèmes de périodes*, d'après la façon même dont on l'a formée.

33. La considération de cette fonction entière $G_1(x, y)$ va nous permettre de démontrer que les intégrales des équations (13) ne peuvent pas admettre de modules de périodicité qui ne soient pas des constantes *indépendantes de u*.

Soient en effet a et b un système de modules de périodicité conjugués pour les deux intégrales des équations (13), a étant relatif à x et b à y. Si u a une valeur non particulière a et b seront, au moins dans un certain domaine de la valeur considérée pour u, des fonctions analytiques régulières de u, (ou des constantes).

Si le point (x, y) de la courbe

$$R(z, q, u, \gamma_1) = 0$$

décrit à partir du point (z_1, q_1) un cycle correspondant aux périodes (a, b), l'élément (x, y, z, p, q) de la caractéristique part de l'élément initial $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ pour aboutir à l'élément final $(x_1 + a, y_1 + b, z_1, p_1, q_1)$ et comme ce dernier élément doit appartenir à l'intégrale $z = f(x, y)$, on aura:

$$f(x_1 + a, y_1 + b) = f(x_1, y_1) = z_1 \tag{15}$$

$$\frac{\partial f(x_1 + a, y_1 + b)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x} = p_1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial f(x_1 + a, y_1 + b)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y} = q_1. \tag{17}$$

Le système de valeurs (x_1, y_1) a été choisi de façon à satisfaire à:

$$\varphi(x_1, y_1) = u. \tag{18}$$

Supposons que nous laissions y_1 constant et que nous fassions varier u; x_1 est alors fonction de u, et par suite aussi a et b. Dérivons la relation (15) par rapport à u en tenant compte de (16) et (17); il vient toutes réductions faites

$$p_1 da + q_1 db = 0$$

ou bien comme $p_1 = uq_1$ et $q_1 \neq 0$

$$da + u db = 0. \tag{19}$$

D'autre part (a, b) est un système de périodes pour les zéros de la fonction $G_1(x, y)$. Donc les zéros de $G_1(x, y)$ admettent chacun des quatre systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$, (a, b). Désignons par $\mu_{1,2}$, $\mu_{1,3}$, $\mu_{2,3}$, $\mu_{1,4}$,

$\mu_{2,4}$, $\mu_{3,4}$ les six entiers caractéristiques relatifs à ces quatre systèmes pris deux à deux pour $G_1(x, y)$.

Nous aurons alors, que ces systèmes soient distincts ou non, la relation indiquée paragraphe 2, et qui, dans les notations actuelles prend la forme suivante:

$$a(\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi)i + b(\mu_{1,2}\omega' - \mu_{1,3}\omega) + \mu_{1,4}(\omega\beta' - \omega'\beta)i + \\ + 2i\pi\mu_{2,4}\omega' + 2i\pi\mu_{3,4}\omega = 0.$$

Comme les entiers ne peuvent être fonctions de u, on aura:

$$da(\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi)i + db(\mu_{1,2}\omega' - \mu_{1,3}\omega) = 0.$$

Or la quantité $\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi$ est nécessairement différente de zéro, puisque la fonction $G_1(x, y)$ s'annule; en comparant cette relation à (19) on voit que si da et db n'étaient pas nuls tous deux, on aurait

$$u(\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi)i - (\mu_{1,2}\omega' - \mu_{3,1}\omega) = 0$$

et cette relation est impossible puisque u a une valeur quelconque. On a donc nécessairement $da = 0$, $db = 0$; a et b sont des constantes indépendantes de u.

Ceci posé, la relation (15) doit être en x_1 et y_1 une identité; car sans cela elle établirait une relation entre x_1 et y_1, qui ne sont assujettis qu'à vérifier la relation (18) où u est arbitraire. Donc (a, b) est un système de périodes de $f(x, y)$; si *nous supposons que $f(x, y)$ n'a pas d'autres systèmes de périodes* que ceux qui sont des sommes de multiples conjugués de $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ on voit que a et b sont de la forme:

$$a = m\omega + n\omega'$$
$$b = mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi.$$

En particulier, si l'on considère un point singulier logarithmique des intégrales des formules (13) les résidus en ce point seront de la forme $\dfrac{m'\omega + n'\omega'}{2i\pi}$ pour la première intégrale et $\dfrac{m'\beta + n'\beta' + 2p'\pi}{2\pi}$ pour la seconde. Les trois entiers m', n' et p' sont ainsi définis d'une façon unique pour chaque point logarithmique, car on ne pourrait, sans modifier la valeur d'une au moins des deux fractions précédentes, modifier les valeurs des entiers m', n' et p'.

31. Des deux intégrales des formules (13) celle dont la nature des points singuliers est le plus facile à discuter, est celle qui est relative à y. En se reportant à la Note II de la fin de ce Mémoire, on trouvera la démonstration

de ce fait que l'intégrale qui donne la valeur de y ne peut avoir que des singularités logarithmiques simples. On peut affirmer qu'elle possède effectivement quelque point singulier logarithmique; car ses modules de périodicité sont purement imaginaires, elle ne peut donc pas être de première espèce; elle ne peut non plus se réduire à une constante, car on ne peut pas avoir pour tous les points de M_1, $y = \text{const.}$ (paragraphe 9). Cela résulte aussi, d'ailleurs, d'une relation entre les résidus de cette intégrale et les entiers $\mu_{1,2}$, $\mu_{3,2}$, $\mu_{3,1}$ déjà considérés et relatifs à $G_1(x, y)$; tous les résidus de l'intégrale considérée sont réels; *la somme de tous les résidus de même signe* est égale à $\pm \frac{1}{2\pi}(\mu_{1,3}\beta + \mu_{2,1}\beta' + 2\mu_{3,2}\pi)$; nous supposons toujours que u n'a pas une valeur exceptionnelle).

En effet, l'intégrale $\int Q(z, q, u)\,dz$ n'ayant que des modules de périodicité de la forme $mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi$, sa partie réelle est une fonction uniforme sur la surface de Riemann (Σ) relative à la courbe

$$R(z, q, u, \gamma_1) = 0.$$

Cette partie réelle ne devient infinie qu'aux points singuliers logarithmiques de l'intégrale; elle est infinie positive aux points logarithmiques de résidu négatif, et inversement. Désignons par A_s l'un quelconque des points logarithmiques à résidu négatif et sur la surface de Riemann Σ (supposée fermée) entourons chaque point A_s d'un très-petit contour c_s et appelons Σ' la surface Σ dont on a retranché toutes les petites portions intérieures aux contours c_s. Sur la surface Σ' la partie réelle de

$$y_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} Q(z, q, u)\,dz$$

sera inférieure à un nombre réel K choisi assez grand; si donc on pose:

$$y = \alpha + i\alpha'$$

où α et α' sont les parties réelle et imaginaire de y, aux valeurs de y pour lesquelles:

$$\alpha > K$$

ne pourront correspondre, dans la formule (13), que des points de la surface Σ intérieurs à l'un des contours c_s.

Choisissons pour un point (z, q) intérieur à c_s l'une des déterminations possibles de

$$y = y_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} Q(z, q, u)\, dz$$

et exprimons z et q pour la portion *très-petite* c_s de Σ, comme fonctions régulières d'un paramètre très-petit t, (de façon, bien entendu, qu'à un point de c_s ne corresponde qu'une valeur de t).

Dans ces conditions, y est une fonction de t, définie aux multiples près de la période polaire purement imaginaire relative à A_s; si K_s désigne un nombre positif *assez grand* supérieur à K, à une valeur de y pour laquelle $\alpha > K_s$ correspondra une seule valeur de t, et par suite une seule valeur de x par la formule

$$x = x_1 + \int_{z_1, q_1}^{z, q} P(z, q, u)\, dz$$

où l'intégrale a la valeur conjuguée de celle de y; remarquons que l'intégrale qui donne x n'a pas d'autres points singuliers que ceux de l'intégrale relative à y; car sur M_1 x ne peut pas devenir infinie sans que y le devienne (paragraphe 9).

Nous avons ainsi défini x comme une fonction uniforme de y pour $\alpha > K_s$; et comme sur la multiplicité M_1, x considérée comme fonction de y n'a pas d'autres points singuliers que des points de ramification, on voit que x sera une une fonction régulière de y dans la portion du plan de y défini par $\alpha > K_s$; soit

$$x = X_s(y)$$

la fonction ainsi définie.

Appelons

$$\frac{-(m_s\omega + n_s\omega')}{2i\pi} \quad \text{et} \quad \frac{-(m_s\beta + n_s\beta' + 2p_s\pi)}{2\pi}$$

les deux résidus en A_s des deux intégrales précédentes.

On a

$$m_s\beta + n_s\beta' + 2p_s\pi > 0$$

puisque le résidu est négatif pour l'intégrale relative à y. Si le point t fait, dans son plan représentatif, le tour de l'origine dans le sens indirect x et y augmentent respectivement de $(m_s\omega + n_s\omega')$, $(im_s\beta + in_s\beta' + 2ip_s\pi)$. Donc on a

$$x + m_s\omega + n_s\omega' = X_s(y + m_s i\beta + n_s i\beta' + 2p_s i\pi).$$

Cherchons tous les entiers m, n, p, pour lesquels on a, en supposant toujours $\alpha > K_s$:

$$x + m\omega + n\omega' = X_s(y + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi).$$

Comme z et q sont des fonctions uniformes de x et y aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ (formules 14), si y augmente de $(mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi)$ et x de $(m\omega + n\omega')$ le point (z, q) décrit un contour fermé qui, dans le cas actuel, est tout entier dans c_s, puisque α reste supérieure à K_s. Or dans c_s les intégrales précédentes n'admettent qu'un seul système de modules conjugués $(m_s\omega + n_s\omega')$, $(m_s i\beta + n_s i\beta' + 2p_s i\pi)$ et par conséquent on doit avoir λ étant un entier

$$m\omega + n\omega' = \lambda(m_s\omega + n_s\omega')$$

$$mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi = \lambda(m_s i\beta + n_s i\beta' + 2p_s i\pi)$$

ce qui montre que les augments conjugés pour la branche principale

$$x = X_s(y)$$

sont $m_s\omega + n_s\omega'$ et $i(m_s\beta + n_s\beta' + 2p_s\pi)$.

Si il y a en tout h points A_s, en faisant $s = 1, 2, \ldots h$ nous aurons mis en évidence h branches principales; si K' désigne le plus grand des nombres K_s, nous aurons ainsi pour $\alpha > K'$ h branches principales pour les zéros de $G_1(x, y)$.

Montrons que ces h branches sont distinctes pour les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ et qu'il n'y en a pas d'autre.

Si, en effet, deux des h branches n'étaient pas distinctes, on passerait de l'une à l'autre par l'addition à x et y de multiples des périodes; mais comme z et q sont des fonctions uniformes de x et y admettant ces périodes, les points (z, q) correspondant sur la surface de Riemann aux deux branches principales seraient les mêmes: cela est absurde puisque les deux branches correspondent à deux des contours c_s différents.

Si maintenant (x, y) est un zéro quelconque de $G_1(x, y)$ pour lequel la partie réelle de y est supérieure à K', il y a un zéro homologue $(x + m\omega + n\omega'$, $y + mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi)$ situé sur M_1 et pour lequel on a aussi $\alpha > K'$. A ce zéro correspond donc un point (z, q) intérieur à l'un des contours c_s et, par conséquent le zéro considéré aura bien un certain homologue sur la branche principale correspondante. Il n'y a donc pas d'autre branche principale que les h branches trouvées plus haut.

Enfin, il est bien évident que chaque branche principale ne doit être comptée qu'une fois, d'après la façon même dont on a formé $G_1(x, y)$.

Nous pouvons alors appliquer les formules obtenues au paragraphe (21). Elles donnent, si $\frac{\omega'}{\omega}$ a sa partie imaginaire positive

$$
(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu_{2,3} &= \sum_{s=1}^{s=h} p_s \\ \mu_{3,1} &= \sum_{s=1}^{s=h} m_s \\ \mu_{1,2} &= \sum_{s=1}^{s=h} n_s . \end{aligned} \right.
$$

On voit d'après cela que la somme des résidus négatifs de l'intégrale $\int Q(z, q, u)dz$, qui est la somme des h quantités $-\dfrac{m_s\beta + n_s\beta' + 2p_s\pi}{2\pi}$ est égale à $-\dfrac{\mu_{3,1}\beta + \mu_{1,2}\beta' + 2\mu_{2,3}\pi}{2\pi}$.

35. Revenons maintenant à la décomposition de $\varphi(x, y) - u$ en ses facteurs irréductibles quant aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Nous avons mis en évidence un premier facteur $G_1(x, y)$. Supposons que le quotient $\dfrac{\varphi(x, y) - u}{G_1(x, y)}$ admette encore des zéros. En prenant l'un de ces zéros (x_2, y_2) arbitrairement mais sous les mêmes restrictions que pour (x_1, y_1) nous aurons les équations d'une multiplicité M_2 sous la forme

$$
x = x_2 + \int_{z_2, q_2}^{z, q} P(z, q, u)dz
$$

$$
y = y_2 + \int_{z_2, q_2}^{z, q} Q(z, q, u)dz
$$

où les intégrales sont attachées à *l'une* des courbes

$$
R(z, q, u, \gamma_k) = 0
$$

à savoir, à la courbe sur laquelle est situé le point (z_2, q_2). Or nous avons vu que les modules de périodicité et en particulier les résidus des intégrales $\int P(z, q, u)dz$ et $\int Q(z, q, u)dz$ sont indépendants de u. On peut, comme nous l'avons vu, faire décrire à la variable u un cycle choisi de telle sorte que la courbe $R(z, q, u, \gamma_1) = 0$ se change en l'une quelconque des courbes $R(z, q, u, \gamma_k) = 0$. Donc les divers résidus des deux intégrales sont les mêmes, quelle que soit celle des courbes à laquelle elles sont attachées (u ayant toujours une valeur non particulière).

Donc si avec M_2 nous formons une fonction entière $G_2(x, y)$, comme $G_1(x, y)$ a été formée avec M_1, les entiers caractéristiques de $G_2(x, y)$ seront les mêmes que ceux de $G_1(x, y)$, d'après les formules (20).

En poursuivant la décomposition de $\varphi(x, y) - u$ on ne pourra obtenir qu'un nombre limité de *facteurs irréductibles* tels que $G_1(x, y)$; soit ϱ ce nombre. D'autre part, appelons $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$, les trois entiers caractéristiques pour la fonction triplement périodique $\varphi(x, y)$ aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Imaginons $\varphi(x, y)$ écrite sous la forme du quotient de deux fonctions entières, $H_1(x, y)$ et $H_2(x, y)$ *sans facteur commun*. $H_1(x, y)$ admet les entiers caractéristique $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, et $m_{3,1}$ et *ses facteurs premiers relativement à* $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ sont les ϱ fonctions $G_1(x, y)$, $G_2(x, y)$, ... $G_\varrho(x, y)$. Il en résulte que:

$$(21) \qquad m_{1,2} = \varrho\mu_{1,2}, \quad m_{2,3} = \varrho\mu_{2,3}, \quad m_{3,1} = \varrho\mu_{3,1}.$$

D'après cela ϱ ne peut être qu'un diviseur commun à $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{3,1}$.

Il est facile de montrer que ϱ est un multiple de n (en désignant toujours par n le nombre des courbes $R(z, q, u, \gamma_k) = 0$).

Reportons nous à la relation (18):

$$\varphi(x_1, y_1) = u$$

avec

$$R(z_1, q_1, u, \gamma_1) = 0.$$

Laissons y_1 constant et faisons décrire à u un cycle fermé ayant pour effet de changer γ_1 en γ_2; appelons x'_1 la valeur finale de x_1 et z'_1, q'_1 les valeurs correspondantes de z et q.

Il est clair que l'on aura:

$$R(z'_1, q'_1, u, \gamma_2) = 0$$

et que par conséquent (x'_1, y_1) sera un zéro de $\varphi(x, y) - u$ appartenant à une multiplicité simple relative à $R(z'_1, q'_1, u, \gamma_2) = 0$.

Il est bien facile d'en conclure qu'à chaque facteur $G_1(x, y)$ relatif à $R(z, q, u, \gamma_1) = 0$ correspond un facteur analogue relatif à $R(z, q, u, \gamma_2) = 0$ et inversement. Par suite, parmi les ϱ facteurs de décomposition de $\varphi(x, y) - u$ il y en a le même nombre relativement à chacune des n courbes $R(z, q, u, \gamma_k) = 0$.

On peut par suite poser:

$$\varrho = n\varrho'$$

ϱ' étant un entier positif.

36. A l'aide des résultats obtenus, il est facile de résoudre la question suivante:

Étant données les deux équations:

$$(22)\qquad \begin{cases} f(x, y) = \zeta \\ \varphi(x, y) = u \end{cases}$$

où ζ et u ont des valeurs données *quelconques*, combien y a-t-il de systèmes de valeurs *distincts* de x et de y qui vérifient ces deux équations? On considère ici, comme *non distincts* des systèmes de valeurs de x et de y ne différant que par des multiples conjugués des périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$.

De plus, il n'est question que des systèmes de valeurs de x et y qui dépendent de ζ et u, en d'autres termes nous excluons les points d'indétermination de $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$.

Il s'agit donc, d'après ce qui précède, de trouver toutes les solutions de l'un ou de l'autre des ϱ systèmes d'équations:

$$(23)\qquad \begin{cases} f(x, y) = \zeta \\ G_k(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots \varrho)$$

Soit M_k la *multiplicité simple de zéros* qui a servi à former $G_k(x, y)$. Tout zéro de $G_k(x, y)$ a un *homologue* sur M_k. Il suffit donc de chercher les points de M_k, pour lesquels on a:

$$f(x, y) = \zeta.$$

Substituons pour cela dans $f(x, y)$ les expressions d'un point de la multiplicité M_k, expressions qui sont de la forme:

$$(24)\qquad \begin{cases} x = x_k + \displaystyle\int_{z_k, q_k}^{z, q} P(z, q, u)\,dz \\ y = y_k + \displaystyle\int_{z_k, q_k}^{z, q} Q(z, q, u)\,dz. \end{cases}$$

Comme la caractéristique que définissent ces formules est tout entière sur la surface $z = f(x, y)$, les expressions précédentes de x et y substituées dans $f(x, y)$, donneront identiquement:

$$f(x, y) = z$$

Donc pour que les formules (24) donnent un point de M_k vérifiant

$$f(x, y) = \zeta$$

il faut et il suffit que, dans ces formules, $z = \zeta$.

Soit ν le degré commun par rapport à q des différentes courbes $R(z, q, u, \gamma_k) = 0$. Pour chacune de ces courbes il y a donc ν points pour lesquels $z = \zeta$. Soient $(\zeta, q_k^{(l)})$ (avec $l = 1, 2, \ldots \nu$), les ν points qui se rapportent à la courbe à laquelle se rapporte M_k; ils seront distincts puisque ζ a une valeur *quelconque*. Les ν points (x, y) correspondants seront aussi *distincts* car l'on a toujours dans les formules (24): $q = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$; deux points (x, y) homologues donneraient la même valeur de q. En donnant à k successivement les ϱ valeurs $1, 2, \ldots \varrho$ on aura donc $\nu\varrho$ systèmes de valeurs distincts comme solutions des équations (22). Ces $\nu\varrho$ systèmes de valeurs sont bien distincts: car si deux systèmes de valeurs proviennent d'une même multiplicité M_k nous avons vu qu'ils sont distincts; si ils proviennent de deux multiplicités différentes M_k, M_s relatives par conséquent à deux facteurs différents $G_k(x, y)$ et $G_s(x, y)$, si pour une valeur quelconque de ζ ils étaient homologues, c'est que les deux multiplicités M_k, M_s seraient elles-mêmes homologues, comme on le voit en laissant u constant et en faisant varier ζ de façon quelconque. Par suite les facteurs $G_k(x, y)$ et $G_s(x, y)$ auraient les mêmes zéros, ou en d'autres termes $\varphi(x, y) - u$ aurait un facteur double. Mais comme $\varphi(x, y)$ n'est pas une constante et admet les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ elle renferme nécessairement la variable x d'une façon effective (paragraphe 2) c'est-à-dire que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ n'est pas nulle identiquement. Or $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ n'admet qu'un nombre limité de facteurs tels que $G_k(x, y)$, donc la circonstance d'un facteur double dans $\varphi(x, y) - u$ ne peut se produire que pour un nombre limité de valeurs de u. Parmi les $\nu\varrho$ points $(\zeta, q_k^{(l)})$ obtenus précédemment, on voit facilement combien il y en a de distincts. Sur chacune des n courbes $R(z, q, u, \gamma) = 0$, il y en a ν distincts: donc, en tout, il y a $n\nu$ points distincts parmi les $\nu\varrho$ points $(\zeta, q_k^{(l)})$. Nous avons posé plus haut: $\varrho = n\varrho'$; ϱ' désigne le nombre de facteurs $G_k(x, y)$ qui se rapportent à une même courbe. Donc chacun des $n\nu$ points distincts figure ϱ' fois parmi les points $(\zeta, q_k^{(l)})$; en d'autres termes à chacun des $n\nu$ points distincts correspondent ϱ' systèmes de valeurs distinctes pour x et y. Nous emploierons, en conséquence, les notations suivantes: chacun des $n\nu$ points distincts sera désigné par (ζ, q_t) $(t = 1, 2, \ldots n\nu)$ et les ϱ' points (x, y) correspondants seront désignés par $(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})$ où $r = 1, 2, \ldots \varrho'$.

On aura d'après cela:

$$(25) \qquad q_t = \frac{\partial f(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})}{\partial y} \qquad (r = 1, 2, \ldots \varrho'; \ t = 1, 2, \ldots n r)$$

en posant

$$\frac{p_t}{q_t} = u$$

on aura:

$$(26) \qquad p_t = \frac{\partial f(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})}{\partial x} \qquad (r = 1, 2, \ldots \varrho')$$

(puisque $\varphi(x_t^{(r)}, y_t^{(r)}) = u$).

Si l'on considère deux systèmes de valeurs $(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})$ et $(x_t^{(r')}, y_t^{(r')})$ de même indice inférieur et d'indices supérieurs différents, comme ils se rapportent au même point (ζ, q_t) ils se rapportent à la même courbe $R = 0$. Il résulte alors immédiatement des expressions de $x_t^{(r)}$, $y_t^{(r)}$, $x_t^{(r')}$, $y_t^{(r')}$ sous la forme (24) que les différences $x_t^{(r)} - x_t^{(r')}$ et $y_t^{(r)} - y_t^{(r')}$ restent invariables lorsque u étant constant on fait varier ζ: elles ne sont donc fonctions que de u. D'ailleurs l'une au moins de ces deux différences doit dépendre effectivement de u. Car si elles étaient constantes toutes les deux, on voit facilement qu'elles seraient pour $f(x, y)$ un système de périodes et par conséquent de la forme $(m\omega + n\omega', mi\beta + ni\beta' + 2ip\pi)$. Les points $(x_t^{(r)}, y_t^{(r)})$ et $(x_t^{(r')}, y_t^{(r')})$ ne seraient pas distincts contrairement à ce que l'on a vu.

Désignons maintenant par z', p', q' un système quelconque (non particulier) de valeurs satisfaisant à

$$(27) \qquad F(z', p', q') = 0$$

et recherchons les systèmes de valeurs de x et y distincts satisfaisant aux trois équations:

$$(28) \qquad f(x, y) = z', \quad \frac{\partial f}{\partial x} = p', \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q'.$$

Posons pour cela $u = \dfrac{p'}{q'}$; z' et u auront des valeurs quelconques et les solutions cherchées devront être comprises dans les $r\varrho$ solutions des équations:

$$(29) \qquad \begin{cases} f(x, y) = z' \\ \varphi(x, y) = u. \end{cases}$$

Les nr valeurs distinctes de q_t de la discussion précédente sont données manifestement par l'équation

(30) $$F(z', qu, q) = 0$$

débarrassée si il y a lieu des solutions $q = 0$; car $F(z', qu, q)$ est le produit des n facteurs $R(z', q, u, \gamma)$.

Mais l'équation (30) est vérifiée pour $q = q'$, car $uq' = p'$, et elle se réduit alors à (27). Donc q' est une des $n\nu$ valeurs distinctes de q_t. Les seules solutions du système (29) qui peuvent convenir au système (28) sont celles pour lesquelles $q_t = q'$; elles sont en nombre ϱ' et comme $\frac{q'}{p'} = u$ on voit d'après (25) et (26) qu'elles conviennent effectivement.

Donc le système (28) a ϱ' solutions distinctes pour un *point* (z', p', q') non particulier de la *surface*

(31) $$F(z, p, q) = 0.$$

Nous avons ainsi une interprétation de l'entier ϱ'.

Considérons maintenant le système d'équations:

(32) $$\begin{cases} f(x, y) = z \\ \varphi(x, y) = u \end{cases}$$

comme définissant x et y en fonction des deux variables indépendantes z et u. Les dérivées partielles du premier ordre de x et y par rapport à z et u, $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ ont, d'après ce qui précède $\nu\varrho$ déterminations pour chaque système de valeurs non particulières de z et u, puisqu'il n'y a pour x et y que $\nu\varrho$ déterminations *distinctes* aux multiples près des périodes.

37. Ce fait est de nature à faire prévoir la nature algébrique de ces quatre dérivées comme fonctions de z et u. En ce qui concerne les deux premières $\frac{\partial x}{\partial z}$ et $\frac{\partial y}{\partial z}$ on voit immédiatement qu'elles sont des fonctions algébriques de z et u (formules 24). On a, en effet,

$$\frac{\partial x}{\partial z} = P(z, q, u), \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = Q(z, q, u)$$

où z, q et u sont liés par une relation algébrique:

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0$$

ou bien encore par la relation:

(33) $$F(z, qu, q) = 0$$

débarrassée, si il y a lieu, des solutions $q = 0$.

Nous allons montrer que $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial u}$ sont aussi des fonctions algébriques de z et u.

Considérons la relation (33) comme définissant une surface, dont un point quelconque a pour coordonnées (z, q, u). Cette surface ne se décompose pas en plusieurs autres, sans cela comme on le voit sans peine, la relation

$$F(z, p, q) = 0$$

se decomposerait aussi. Mais sa section par un *plan* $u =$ constante peut se décomposer en plusieurs courbes

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0$$

comme nous l'avons supposé plus haut.

Les intégrales

$$\int P(z, q, u) dz \quad \text{et} \quad \int Q(z, q, u) dz$$

relatives à l'une de ces courbes $u =$ const. n'ont que des modules de périodicité indépendants de u et qui sont de la forme $m\omega + n\omega'$ et $mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi$. On peut alors trouver deux fonctions rationelles $P_1(z, q, u)$ et $Q_1(z, q, u)$ de z, q et u telles que

$$P(z, q, u)dz + P_1(z, q, u)du$$

et

$$Q(z, q, u)dz + Q_1(z, q, u)du$$

soient, relativement à la surface (33) des différentielles totales exactes de z et u prises comme variables indépendantes.

Que z et u puissent être prises comme variables indépendantes cela résulte de la discussion que nous avons faite des équations (32), discussion établie sous l'hypothèse du début que $p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}$ n'est pas nul pour tous les éléments de $z = f(x, y)$; mais on le voit aussi directement sur l'équation (33); car cette relation renferme nécessairement q lorsque $F(z, p, q)$ n'est pas homogène en p et q, c'est-à-dire lorsque $p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = 0$ n'est pas nécessairement vérifiée comme conséquence de $F = 0$. L'existence des fonctions rationnelles $P_1(z, q, u)$ et $Q_1(z, q, u)$ satisfaisant aux conditions posées est un théorème connu de la théorie des différentielles totales attachées à une surface. (Picard, Fonctions algébriques de deux variables indépendantes, tome I, page 102).

Toutefois, comme nous supposons possible ici la décomposition des sections $u = \text{const.}$ nous allons rappeler brièvement la démonstration en l'adaptant à ce cas.

Soit (z, u, q) un point quelconque non particulier de la surface (33). Il appartient à une, et à une seule des courbes:

$$R(z, q, u, \gamma_k) = 0.$$

Soit z_0 une constante absolue. Il y a sur la courbe précédente ν points pour lesquels $z = z_0$. Soient (z_0, q'_n) $(n = 1, 2, \dots \nu)$ ces points et posons:

$$S = \sum_{n=1}^{n=\nu} \int_{z_0, q'_n}^{z, q} P(z, q, u)\,dz. \tag{34}$$

Dès que le point (z, q, u) est donné (non particulier) S a une valeur bien déterminée aux multiples près des périodes. Comme ces périodes sont des constantes $\frac{\partial S}{\partial u}$ aura une valeur déterminée sans ambiguité. (S est considérée ici comme fonction des deux variables indépendantes z et u). Si donc nous posons:

$$P_1 = \frac{1}{\nu} \sum_{n=1}^{n=\nu} \int_{z_0, q'_n}^{z, q} \frac{\partial P}{\partial u}\,dz$$

où $\frac{\partial P}{\partial u}$ se rapporte à P considérée comme fonction des deux variables indépendantes z et u, P_1 aura une valeur unique en un point quelconque de la surface. On en conclut ensuite facilement que P_1 est une fonction rationelle de (z, u, q). On a évidemment:

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial u} \tag{35}$$

les dérivations ayant toujours la même signification. On trouvera de la même façon une fraction rationnelle $Q_1(z, q, u)$ telle que:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial u}. \tag{36}$$

et, par conséquent, on aura deux différentielles totales exactes:

$$Pdz + P_1 du$$
$$Qdz + Q_1 du.$$

Ceci posé, nous pouvons prendre dans les équations (32) pour x et y les expressions (24) où l'on suppose:

(37) $$\varphi(x_k, y_k) = u.$$

Dans cette dernière relation lorsque u varie nous pouvons laisser y_k constant et considérer x_k comme une fonction de u (paragraphe 9). Alors z_k et q_k qui sont donnés par

$$z_k = f(x_k, y_k), \quad q_k = \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}$$

sont fonctions de u seul. En dérivant les formules (24), il vient:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{dx_k}{du} + \int_{z_k, q_k}^{z, q} \frac{\partial P}{\partial u} dz - P(z_k, q_k, u) \frac{dz_k}{du}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \int_{z_k, q_k}^{z, q} \frac{\partial Q}{\partial u} dz - Q(z_k, q_k, u) \frac{dz_k}{du}.$$

Ces formules se simplifient à l'aide de (35) et (36). On obtient:

(38) $$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = P_1(z, q, u) - P_1(z_k, q_k, u) + \dfrac{dx_k}{du} - P(z_k, q_k, u) \dfrac{dz_k}{du} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} = Q_1(z, q, u) - Q_1(z_k, q_k, u) - Q(z_k, q_k, u) \dfrac{dz_k}{du}. \end{cases}$$

Dans la première de ces formules, les trois derniers termes et dans la seconde les deux derniers termes ne sont fonctions que de u.

Nous poserons

(39) $$\begin{cases} \eta_1(u) = -P_1(z_k, q_k, u) + \dfrac{dx_k}{du} - P(z_k, q_k, u) \dfrac{dz_k}{du} \\[2ex] \eta_2(u) = -Q_1(z_k, q_k, u) - Q(z_k, q_k, u) \dfrac{dz_k}{du}. \end{cases}$$

D'où

$$(40) \qquad \begin{cases} \eta_1(u) = \dfrac{\partial x}{\partial u} - P_1(z, q, u) \\[2ex] \eta_2(u) = \dfrac{\partial y}{\partial u} - Q_1(z, q, u). \end{cases}$$

Nous avons vu que $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ ont $\nu\varrho$ déterminations lorsque z et u sont donnés de façon quelconque. A chacune de ces déterminations correspond une valeur déterminée de q, de telle sorte que, d'après (40), $\eta_1(u)$ et $\eta_2(u)$ ont $\nu\varrho$ déterminations. Il est inutile pour ce qui suit de se demander si ces déterminations sont toutes distinctes. Etudions la nature des points singuliers de $\eta_1(u)$ et $\eta_2(u)$. Il résulte de ce que nous avons dit paragraphe 9, que si u_1 désigne une valeur quelconque, sans aucune exclusion de valeurs particulières, il existe un nombre positif ε tel que toute détermination de x dans la relation $\varphi(x, y_k) = u$ où l'on suppose $|u - u_1| < \varepsilon$ et y_k constant, sera racine d'un polynôme entier en x, $P(x)$ dont le terme du plus haut degré en x a pour coefficient l'unité, les autres coefficients étant des fonctions régulières de u pour $|u - u_1| < \varepsilon$; et cela est encore vrai même si $u_1 = \infty$, en changeant $u - u_1$ en $\dfrac{1}{u}\cdot$ En effet, on peut choisir ε assez petit pour que à chaque système de valeurs (x', u') de x et u corresponde un polynôme normal $r(x)$ valable pour le domaine 2ε autour de (x', u'). Si u' appartient au domaine $|u - u_1| < \varepsilon$, tous les coefficients de $r(x)$ sont des fonctions régulières dans le domaine $|u - u_1| < \varepsilon$. Si $u_1 = \infty$, on raisonne en changeant u en $\dfrac{1}{u}$. Il résulte alors de là, que, quelle que soit la détermination choisie pour x_k, u appartenant au domaine $|u - u_1| < \varepsilon$, on pourra toujours la développer au voisinage de $u = u_1$ en une série de la forme:

$$(41) \qquad x_k = a_0 + a_1(u - u_1)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + a_n(u - u_1)^{\frac{n}{\mu}} + \cdots$$

procédant suivant les puissances entières et *positives* de $(u - u_1)^{\frac{1}{\mu}}$, μ étant un entier positif, et convergente pour un domaine $|u - u_1| < \varepsilon$. Si l'on substitue ce développement de x_k dans les expressions de z_k et q_k

$$z_k = f(x_k, y_k), \quad q_k = \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}$$

on voit clairement que $u = u_1$ est un point ordinaire ou un pôle algébrique, ou seulement un point de ramification algébrique pour l'une ou pour l'autre des fonctions z_k et q_k.

Il en est évidemment de même pour tous les termes des seconds membres de (39) puisque P_1, P, Q_1 et Q sont des fractions rationnelles. La détermination que l'on considère de $\eta_1(u)$ ou de $\eta_2(u)$ est donc régulière pour $u = u_1$, ou bien admet ce point comme point de ramification algébrique, ou bien l'admet comme pôle algébrique. Le résultat subsiste même pour $u_1 = \infty$, d'après ce que nous avons fait remarquer. Il en est de même pour chacune des $\nu\varrho$ déterminations de $\eta_1(u)$ et $\eta_2(u)$.

Si l'on considère alors une fonction symétrique rationnelle et entière des $\nu\varrho$ déterminations de $\eta_1(u)$, cette fonction étant une fonction *uniforme* de u, ou bien sera régulière pour $u = u_1$ ou bien admettra u_1 comme pôle. Cette conclusion subsiste même pour $u_1 = \infty$. Or une fonction uniforme de u qui n'a pour points singuliers que des pôles, même pour $u = \infty$, est une fraction rationnelle de u. Il résulte de là que $\eta_1(u)$ et $\eta_2(u)$ sont des fonctions algébriques de u. Les formules (40) montrent alors que $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial u}$ sont des fonctions algébriques de u et z.

38. Déterminons maintenant une fonction algébrique v de z et u permettant d'exprimer les cinq fonctions algébriques $q, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial z}$ sous forme de fraction rationnelle en z, u et v.

Il suffit de poser pour cela:

$$v = \lambda_1 q + \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial u} + \lambda_3 \frac{\partial x}{\partial z} + \lambda_4 \frac{\partial y}{\partial u} + \lambda_5 \frac{\partial y}{\partial z} \tag{42}$$

où les λ sont cinq constantes arbitraires, non choisies de façon particulière.

Soit:

$$\Phi(z, u, v) = 0 \tag{43}$$

la relation algébrique, entière et irréductible qui lie v à z et u.

Les relations

$$f(x, y) = z,$$

$$\varphi(x, y) = u$$

permettent de calculer $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}$, en fonction méromorphe et triplement périodique de x et y aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$ $(\omega', i\beta')$. Comme de plus $q = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, on voit dans la relation (42) que v est une fonction méromorphe de x et y aux mêmes périodes.

Soit:

(44) $$v = f_1(x, y).$$

Soient maintenant

$$\frac{\partial x}{\partial z} = R_1(z, u, v), \quad \frac{\partial x}{\partial u} = S_1(z, u, v),$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = R_2(z, u, v), \quad \frac{\partial y}{\partial u} = S_2(z, u, v)$$

les expressions des dérivées de x et y en fractions rationnelles de z, u et v. Nous aurons:

(45)
$$x = x_0 + \int_{z_0, u_0, v_0}^{z, u, v} R_1(z, u, v)dz + S_1(z, u, v)du,$$

$$y = y_0 + \int_{z_0, u_0, v_0}^{z, u, v} R_2(z, u, v)dz + S_2(z, u, v)du,$$

où x_0, y_0 sont deux constantes arbitraires, pour lesquelles toutefois $f(x_0, y_0)$, $\varphi(x_0, y_0)$ et $f_1(x_0, y_0)$ ne sont pas indéterminées, de telle sorte que z_0, u_0, v_0 sont définis sans ambiguité par

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad v_0 = f_1(x_0, y_0), \quad u_0 = \varphi(x_0, y_0).$$

On suppose encore que (z_0, u_0, v_0) n'est pas un point singulier des intégrales précédentes, qui, bien entendu, se rapportent à la surface (43).

Supposons que le point (z, u, v) décrive sur cette surface une ligne quelconque fermée; si (a, b) est le système de modules de périodicité conjugués des deux intégrales pour ce cycle fermé, on aura

$$f(x + a, y + b) = f(x, y)$$

puisque z a repris finalement sa valeur initiale. Comme $f(x, y)$ n'a, par hypothèse, d'autres systèmes de périodes que des sommes de multiplies de $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ on a nécessairement:

$$a = m\omega + n\omega'$$

$$b = mi\beta + ni\beta' + 2pi\pi$$

(m, n, p entiers). Donc à un point (z, u, v) *non particulier* de la surface (43)

correspond, aux multiples près des périodes, un seul système de valeurs pour (x, y).

Inversement à un point (x, y), correspond un seul point de la surface, par les formules:

$$z = f(x, y), \quad u = \varphi(x, y), \quad v = f_1(x, y);$$

il n'y a exception que pour les points d'indétermination de $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ et $f_1(x, y)$.

Nous savons que $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ s'exprime en fonction rationnelle de z, u et v. Il en est par suite de même de $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, puisque $\frac{p}{q} = u$.

Donc à un point de la surface

$$\Phi(z, u, v) = 0$$

correspond un seul point de la surface

$$F(z, p, q) = 0.$$

Mais à un point (z, p, q) de cette dernière surface correspondent ϱ' points de la surface $\Phi(z, u, v) = 0$, puisque nous avons vu qu'à ce point (z, p, q) correspondent ϱ' systèmes de valeurs distincts pour x et y.

Pour arriver à la conclusion qui est notre but, il nous faut étudier la nature des singularités des deux intégrales qui figurent dans les seconds membres des équations (45). Il est avantageux pour cette étude d'effectuer sur la surface

$$\Phi(z, u, v) = 0$$

une transformation bi-rationnelle, la changeant en une surface

$$\Phi_1(U, V, W) = 0$$

n'admettant pas d'autres singularités que des courbes doubles avec points triples, de telle sorte que chaque point de la surface est ordinaire pour la nappe à laquelle il appartient, à l'exception des *points-pince;* mais on peut supposer qu'aucun de ces points spéciaux n'est singulier pour l'une des intégrales (45).

Les coordonnées U, V, W d'un point de $\Phi_1 = 0$ étant des fonctions rationnelles de z, u et v seront des fonctions méromorphes de x et y aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Soient:

$$U = \Psi_1(x, y), \quad V = \Psi_2(x, y), \quad W = \Psi_3(x, y). \tag{46}$$

Ces trois fonctions n'admettent pas d'autres systèmes de périodes qui leur soient communs, que ceux qui sont de la forme $(m\omega + n\omega', mi\beta + ni\beta' + 2\,pi\pi)$ puisque U, V, W reprenant les mêmes valeurs, z reprend aussi la même valeur. Les intégrales (45) n'admettent que des modules de périodicité de cette forme. Si (x_1, y_1) est un système de valeurs données pour x et y, à tous les systèmes de valeurs $(x_1 + m\omega + n\omega', y_1 + mi\beta + ni\beta' + 2\,pi\pi)$ correspond un même système de valeurs de U, V, W défini d'une façon unique; il n'y a exception que si (x_1, y_1) est un point d'indétermination pour l'une des trois fonctions Ψ_1, Ψ_2 ou Ψ_3. Ces points d'indétermination forment un ensemble dénombrable et nous appellerons E l'ensemble dénombrable des valeurs de y correspondantes. Nous appelons J_x et J_y les deux intégrales des seconds membres des équations (45) et nous supposerons, ce qui est évidemment permis, que x_0 et y_0 sont nuls. On aura:

$$(47) \qquad \begin{cases} x = J_x \\ y = J_y, \end{cases}$$

où J_x et J_y sont exprimées en fonction du point (U, V, W).

39. Nous montrerons tout d'abord que l'intégrale J_y n'a pas d'autres singularités que des singularités logarithmiques simples (c'est-à-dire non superposées à des singularités polaires).

Il nous suffira de montrer que le long d'une courbe algébrique arbitraire Γ prise sur $\Phi_1(U, V, W) = 0$ l'intégrale J_y se réduit à une intégrale abélienne n'ayant d'autres points singuliers que des points logarithmiques simples.

Or les coordonnées (U, V, W) d'un point de Γ satisfont à une relation algébrique entière $\Phi_2(U, V, W) = 0$ distincte de $\Phi_1 = 0$. Si dans Φ_2 on remplace U, V, W par leurs expressions en fonction de x et y, $\Phi_2(U, V, W)$ se réduira à une fonction méromorphe de x et y aux périodes $(0, 2\,i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Soit $H(x, y)$ le numérateur de cette fonction méromorphe (mise sous forme irréductible). Tout le long de Γ on aura

$$H(x, y) = 0$$

et par suite les équations

$$(48) \qquad \begin{cases} x = (J_x)_\Gamma \\ y = (J_y)_\Gamma, \end{cases}$$

où $(J_x)_\Gamma$ et $(J_y)_\Gamma$ sont les intégrales J_x et J_y prises le long de Γ, seront les équations d'une multiplicité simple de zéros appartenant à $H(x, y) = 0$. Comme les zéros de $H(x, y)$ admettent les trois systèmes de périodes fondamentaux et que de plus les coordonnées d'un point de la courbe Γ sont données par

$$U = \Psi_1(x, y), \quad V = \Psi_2(x, y), \quad W = \Psi_3(x, y),$$

où Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 admettent les mêmes systèmes de périodes, il en résulte (Note II de la fin du Mémoire) que $(J_y)_\Gamma$ ne peut avoir *d'autres points singuliers que des points logarithmiques simples.*

En outre, sur la multiplicité de zéros considérée x ne pouvant pas devenir infini tant que y reste finie, on voit que:

J_x n'a pas de points singuliers qui ne soient des points singuliers de J_y.

D'ailleurs, d'après un raisonnement fait précédemment, J_y a certainement quelque point singulier, c'est-à-dire quelque courbe logarithmique.

40. Soit donc G une courbe logarithmique pour J_y; les résidus respectifs de J_x et J_y relatifs à G sont nécessairement de la forme $\frac{m\omega + n\omega'}{2i\pi}$ et $\frac{m\beta + n\beta' + 2p\pi}{2\pi}$; le premier de ces résidus peut être nul si m et n le sont; le second est différent de zéro et réel.

Posons

$$X = x - \frac{m_1\omega + n_1\omega'}{i(m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi)}y, \quad Y = \frac{2\pi}{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}y$$

m_1, n_1 et p_1 étant les quotients de m, n, p par leur plus grand commun diviseur.

Pour ces variables les trois systèmes de périodes, après une transformation convenable du *premier ordre* seront comme nous l'avons vu $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, (β_1 et β_2 réels, non commensurables tous deux avec π, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ imaginaire).

Nous poserons:

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= J_x - \frac{m_1\omega + n_1\omega'}{i(m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi)}J_y = K_X \\ Y &= \frac{2\pi}{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}J_y = K_Y. \end{aligned} \right.$$

Sur la courbe G, K_X aura un résidu nul, et K_Y aura pour résidu le plus grand commun diviseur d de m, n et p.

Pour les points de G (sauf peut-être en des points particuliers de cette courbe appartenant à une autre courbe logarithmique de J_y) ou bien K_X sera régulière ou bien elle admettra la courbe G comme courbe polaire. Nous allons montrer que cette dernière hypothèse est en réalité impossible.

Prenons sur G un point non particulier (U_1, V_1, W_1). Au voisinage de ce point l'une des coordonnées d'un point de la surface, W par exemple, sera une

fonction régulière des deux autres, puisque le point (U_1, V_1, W_1) est un point ordinaire pour la nappe de surface à laquelle il appartient.

Posons

$$U = U_1 + \xi, \quad V = V_1 + \eta.$$

Dans l'hypothèse où G est une courbe polaire pour K_X, nous aurons pour des valeurs de ξ et η assez petites:

(50) $$X = \frac{\lambda_1(\xi, \eta)}{[\lambda(\xi, \eta)]^r},$$
$$e^{\frac{Y}{d}} = \lambda(\xi, \eta)e^{\mu(\xi, \eta)},$$

où $\lambda(\xi, \eta)$, $\lambda_1(\xi, \eta)$, $\mu(\xi, \eta)$ sont trois fonctions régulières pour $\xi = \eta = 0$; r est un entier positif. De plus le facteur $\lambda(\xi, \eta)$ est *irréductible* dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'est pas le produit de deux facteurs réguliers s'annulant aussi pour $\xi = \eta = 0$). Les termes de la fraction $\frac{\lambda_1(\xi, \eta)}{[\lambda(\xi, \eta)]^r}$ n'ont pas de facteur commun s'annulant dans le voisinage de $\xi = \eta = 0$; enfin $\lambda_1(0, 0)$ est différent de zéro, le point (U_1, V_1, W_1) n'étant pas *particulier* sur la courbe G. Nous pouvons donc poser:

$$\lambda_2(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt[r]{\lambda_1(\xi, \eta)}}$$

où $\sqrt[r]{\lambda_1(\xi, \eta)}$ désigne l'une des déterminations, choisie arbitrairement de $\sqrt[r]{\lambda_1(\xi, \eta)}$ dans le voisinage de $\xi = \eta = 0$; $\lambda_2(\xi, \eta)$ sera régulière pour les valeurs de ξ et η prises assez petites et $\lambda_2(0, 0) \neq 0$.

Considérons alors les équations suivantes:

(51) $$\begin{cases} t = \lambda(\xi, \eta)\lambda_2(\xi, \eta) \\ x = \lambda(\xi, \eta)e^{\mu(\xi, \eta)}. \end{cases}$$

Il existe (Note III de la fin du Mémoire) une relation de la forme

(52) $$t = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{s-1} x^{s-1} + (a_s + \alpha) x^s$$

où $a_1, a_2, \ldots a_s$ sont s constantes dont le nombre et les valeurs sont bien déterminées, [et dont la première a_1 est différente de zéro et égale à $\lambda_2(0, 0)e^{-\mu(0, 0)}$] qui possède la propriété suivante.

Etant donné un nombre ε_1 positif, arbitrairement petit, il existe un nombre positif ε_2, tel que si x et α sont deux valeurs arbitraires assujetties à la seule condition:

$$|t| < \varepsilon_2, \quad |\alpha| < \varepsilon_2.$$

si dans les équations (51) on remplace τ par la valeur choisie et t par celle que fournit la relation (52), les deux équations ainsi obtenues admettent en ξ et η un système de solutions (ξ', η') tel que

$$|\xi'| < \varepsilon_1, \quad |\eta'| < \varepsilon_1.$$

Il en résulte immédiatement pour le système (50) la propriété suivante.

Si l'on pose:

$$\frac{1}{X} = \left[a_1 e^{\frac{Y}{d}} + a_2 e^{\frac{2Y}{d}} + \cdots + a_{s-1} e^{\frac{(s-1)Y}{d}} + (a_s + \alpha) e^{\frac{sY}{d}}\right]^r \tag{53}$$

puis si l'on prend Y et α arbitraires tels que:

$$\left|e^{\frac{Y}{d}}\right| < \varepsilon_2, \qquad |\alpha| < \varepsilon_2$$

et si l'on substitue dans (50) à Y la valeur ainsi choisie et à X celle qui est fournie par (53), les équations obtenues admettent un système de solutions en ξ et η appartenant au domaine

$$|\xi| < \varepsilon_1, \quad |\eta| < \varepsilon_1.$$

Ceci posé, les trois systèmes de périodes fondamentaux pour X et Y étant pris sous la forme indiquée plus haut $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$ et l'un des nombres β_1 et β_2 étant incommensurable avec π, supposons que ce soit β_1. En désignant par M un entier arbitraire, nous poserons:

$$\theta = e^{\frac{Mi\beta_1}{d}} \tag{54}$$

de telle sorte que $|\theta| = 1$ et $\theta \neq 1$.

Si nous posons

$$e^{\frac{Y}{d}} = r \tag{55}$$

nous aurons

$$e^{\frac{Y+Mi\beta_1}{d}} = \theta r.$$

Prenons deux valeurs α et α' arbitrairement sous la seule condition

$$|\alpha| < \varepsilon_2, \qquad |\alpha'| < \varepsilon_2$$

et considérons les deux équations simultanées en X et r:

$$(56)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{I}}{X} = [a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots + (a_s + \alpha)\tau^s]^r \\[2ex] \dfrac{\mathrm{I}}{X + M\omega_1} = [a_1\theta\tau + a_2\theta^2\tau^2 + \cdots + (a_s + \alpha')\theta^s\tau^s]^r. \end{cases}$$

En éliminant X entre ces deux équations on obtient:

$$(57)\qquad \begin{cases} M\omega_1 = \dfrac{\mathrm{I}}{\tau^r[a_1\theta + a_2\theta^2\tau + \cdots + (a_s + \alpha')\theta^s\tau^{s-1}]^r} - \\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{\mathrm{I}}{\tau^r[a_1 + a_2\tau + \cdots + (a_s + \alpha)\tau^{s-1}]^r}. \end{cases}$$

Cette équation algébrique en τ étant mise sous forme entière et ordonnée, on trouve comme terme du plus haut degré en τ:

$$M\omega_1(a_s + \alpha)^r(a_s + \alpha')^r\theta^{rs}\tau^{r(2s-1)}.$$

Comme r et s sont l'un et l'autre au moins égaux à I, on a:

$$r(2s - \mathrm{I}) > \mathrm{I}.$$

D'ailleurs $a_s + \alpha$ et $a_s + \alpha'$ ne sont pas nuls si α et α' ont des valeurs *quelconques* comme nous le supposons. Le terme indépendant de τ est

$$a_1^r(\theta^r - \mathrm{I}) \text{ si } s > \mathrm{I}, \text{ ou } \theta^r(a_1 + \alpha')^r - (a_1 + \alpha)^r \text{ si } s = \mathrm{I}.$$

Dans l'un et l'autre cas ce terme est, quel que soit M, différent de o, si α et α' sont *quelconques*. En outre, comme $|\theta| = \mathrm{I}$, ce terme a un module inférieur à un nombre positif fixe quel que soit M. Le produit des $r(2s - \mathrm{I})$ racines de l'équation sera, suivant les cas

$$\frac{a_1^r(\theta^r - \mathrm{I})}{M\omega_1(a_s + \alpha)^r(a_s + \alpha')^r\theta^{rs}} \text{ ou } \frac{\theta^r(a_1 + \alpha')^r - (a_1 + \alpha)^r}{M\omega_1(a_s + \alpha)^r(a_s + \alpha')^r\theta^{rs}}.$$

Si l'on prend M très grand ce produit sera, d'après tout ce qui précède, aussi petit que l'on voudra et différent de zéro. L'équation (57) aura donc, si M est choisi assez grand une racine τ_1 différente de zéro et satisfaisant à l'inégalité $|\tau_1| < \varepsilon_2$.

La valeur τ_1 n'étant pas nulle, on peut prendre Y_1 telle que

$$e^{\frac{Y_1}{d}} = \tau_1.$$

On peut supposer que cette valeur Y_1 ne correspond à aucun des systèmes de valeurs de X et Y qui fournissent des points d'indétermination pour les fonctions U, V, W de X et Y; car ces points constituent un ensemble dénombrable, et d'autre part il résulte immédiatement de la forme de l'équation (57) que la racine τ_1 ne peut pas être indépendante de α et α' qui sont choisis arbitrairement. Donc on peut supposer que τ_1 et par suite Y_1, n'a pas une valeur particulière.

Pour la valeur $\tau = \tau_1$ les équations (56) ont en X une solution commune X_1, évidemment finie.

Si nous posons alors:

$$X_2 = X_1 + M\omega_1, \qquad Y_2 = Y_1 + Mi\beta_1$$

on a les deux équations:

$$\frac{1}{X_1} = \left[a_1 e^{\frac{Y_1}{d}} + a_2 e^{\frac{2Y_1}{d}} + \cdots + (a_s + \alpha) e^{\frac{sY_1}{d}}\right]^r,$$

$$\frac{1}{X_2} = \left[a_1 e^{\frac{Y_2}{d}} + a_2 e^{\frac{2Y_1}{d}} + \cdots + (a_s + \alpha') e^{\frac{sY_2}{d}}\right]^r$$

avec

$$|\alpha| < \varepsilon_2, \quad \left|e^{\frac{Y_1}{d}}\right| < \varepsilon_2, \quad |\alpha'| < \varepsilon_2, \quad \left|e^{\frac{Y_2}{d}}\right| < \varepsilon_2.$$

Donc à chacun des systèmes de valeurs (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) de X et Y correspondent respectivement pour les équations (50) au moins un système de solutions, soit (ξ_1, η_1) pour (X_1, Y_1), et (ξ_2, η_2) pour (X_2, Y_2) avec:

$$|\xi_1| < \varepsilon_1, \quad |\eta_1| < \varepsilon_1,$$
$$|\xi_2| < \varepsilon_1, \quad |\eta_2| < \varepsilon_1.$$

Ces deux systèmes de valeurs sont forcément distincts puisque les systèmes de valeurs (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont différents. Ils fournissent deux points (U', V', W') et (U'', V'', W'') sur la surface $\Phi_1(U, V, W) = 0$ et ces points sont distincts puisque l'on a:

$$U' = U_1 + \xi_1, \; V' = V_1 + \eta_1; \; U'' = U_1 + \xi_2, \; V'' = V_1 + \eta_2.$$

Mais ce résultat est contradictoire avec ce qui précède. Car (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont deux systèmes de valeurs ne différant que par un multiple du système de périodes $(\omega_1, i\beta_1)$ et ne sont pas, comme nous l'avons montré, des valeurs d'indétermination pour U, V, W. Donc il ne peut leur correspondre deux points distincts (U', V', W') et (U'', V'', W'').

L'hypothèse faite de l'existence d'une singularité polaire le long de G pour K_X est donc impossible. Par suite pour J_x, G ne peut être qu'une singularité logarithmique *simple* comme pour J_y. Comme il en est de même pour chaque courbe logarithmique de J_y et que J_x ne peut pas devenir infinie sans que J_y le devienne, on voit que J_x comme J_y, n'a que des singularités logarithmiques simples.

41. En continuant l'étude des singularités de J_x, nous allons montrer que tous ses résidus sont proportionnels aux résidus correspondants de J_y. Nous montrerons d'abord cette proportionnalité pour deux courbes logarithmiques C et C' correspondant pour J_y à des résidus de *même signe* (à supposer qu'il existe deux telles courbes). Soient

$$\frac{m\omega + n\omega'}{2\,i\pi}, \quad \frac{m\beta + n\beta' + 2\,p\pi}{2\,\pi} \quad \text{et} \quad \frac{m'\omega + n'\omega'}{2\,i\pi}, \quad \frac{m'\beta + n'\beta' + 2\,p'\pi}{2\,\pi}$$

les résidus conjugués relatifs à C et C' avec

$$m\beta + n\beta' + 2\,p\pi > 0 \quad \text{et} \quad m'\beta + n'\beta' + 2\,p'\pi > 0.$$

En posant:

$$c = \frac{m\omega + n\omega'}{i\,(m\beta + n\beta' + 2\,p\pi)}$$

la différence $x - cy = J_x - cJ_y$ aura le long de C son résidu nul, et comme elle ne peut pas avoir de singularités polaires elle sera régulière en un point quelconque, non particulier, $(U_1,\ V_1,\ W_1)$ de C.

On aura par suite, ξ et η conservant la même signification que plus haut:

$$(58) \qquad \begin{cases} x - cy = \nu(\xi,\ \eta) \\ e^{\frac{2\,\pi y}{m\beta + n\beta' + 2\,p\pi}} = \lambda(\xi,\ \eta)\, e^{\mu(\xi,\ \eta)} \end{cases}$$

où λ, μ et ν sont régulières pour $\xi = \eta = 0$. De plus $\lambda(\xi,\ \eta)$ s'annule pour $\xi = \eta = 0$ et est *irréductible* au voisinage de ce système de valeurs. Comme $m\beta + n\beta' + 2\,p\pi$ est positif, la partie réelle de y sera très-grande et négative lorsque ξ et η seront très-petits.

En outre, aux valeurs de x et y liées par la relation:

$$(59) \qquad x - cy = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \cdots + (b_s + \alpha)\tau^s$$

où $b_0,\ b_1, \ldots b_s$ sont des constantes (qui peuvent être toutes nulles) et où

$$|\alpha| < \varepsilon_1, \qquad |\tau| < \varepsilon_2$$

avec

$$\tau = e^{\frac{2\pi y}{m\beta + n\beta' + 2p\pi}}$$

correspondra dans les équations (58) un système au moins de valeurs de ξ et η pour lequel

$$|\xi| < \varepsilon_1, \qquad |\eta| < \varepsilon_1$$

ε_1 et ε_2 ayant ici le même rôle que plus haut.

D'une façon tout analogue, en prenant un point *quelconque* (U_2, V_2, W_2) sur la courbe C', nous poserons

$$(60) \qquad \begin{cases} x - c'y = \nu_1(\xi', \eta') \\ e^{\frac{2\pi y}{m'\beta + n'\beta' + 2p'\pi}} = \lambda_1(\xi', \eta')\, e^{\mu_1(\xi', \eta')} \end{cases}$$

et ensuite:

$$\tau' = e^{\frac{2\pi y}{m'\beta + n'\beta' + 2p'\pi}}$$

avec

$$(61) \qquad x - c'y = c_0 + c_1\tau' + c_2\tau'^2 + \cdots + (c_{s'} + \alpha')\tau'^s$$

où $c_0, c_1, \ldots c_{s'}$ sont s' constantes.

La relation (61) a, à l'égard du système (60) le même sens que la relation (59) à l'égard du système (58). Il est clair que l'on peut supposer que les nombres ε_1 et ε_2 sont les mêmes pour les relations (58) et (59) d'une part et (60) et (61) d'autre part, afin de simplifier les notations.

Nous désignerons pour abréger par $\varrho(\tau, \alpha)$ et par $\varrho'(\tau', \alpha')$ les seconds membres des relations (59) et (61) et nous remarquerons que si l'on a

$$|\tau| < \varepsilon_2, \quad |\alpha| < \varepsilon_2, \quad |\tau'| < \varepsilon_2, \quad |\alpha'| < \varepsilon_2$$

les modules de $\varrho(\tau, \alpha)$ et de $\varrho'(\tau', \alpha')$ seront inférieurs à un nombre positif fixe R.

Dans tout ce qui suit, sans qu'il soit besoin de le répéter, α et α' auront leurs modules inférieurs à ε_2.

Si nous désignons par $-A$ la partie réelle de y, nous pouvons choisir un nombre positif A_1 assez grand pour que l'inégalité

$$A > A_1$$

entraine

$$|\tau| < \varepsilon_2, \qquad |\tau'| < \varepsilon_2.$$

Formons le système de deux équations simultanées en x et y, obtenues en prenant l'équation (59) d'une part et d'autre part l'équation (61) où x et y sont

changés en $x + M\omega + N\omega'$ et $y + (M\beta + N\beta' + 2P\pi)i$ en désignant par M, N, P trois entiers quelconques.

En posant:

$$\theta = e^{\frac{2\pi(M\beta+N\beta'+2P\pi)i}{m'\beta+n'\beta'+2p'\pi}}$$

ces équations seront

$$(62)\qquad \begin{cases} x - cy = \varrho(\tau, \alpha) \\ x + M\omega + N\omega' - c'(y + iM\beta + iN\beta' + 2iP\pi) = \varrho'(\theta\tau', \alpha'). \end{cases}$$

α et α' étant *donnés* arbitrairement, cherchons si ces deux équations admettent en x et y un système commun de solutions pour lequel la partie réelle de y, $-A$, satisfasse à l'inégalité écrite plus haut $A > A_1$.

Eliminons x entre les équations (62) ce qui donnera:

$$(63)\qquad M\omega + N\omega' - (c' - c)y - c'i(M\beta + N\beta' + 2P\pi) = \varrho'(\theta\tau', \alpha') - \varrho(\tau, \alpha).$$

Supposons $c' - c \neq 0$ et écrivons l'équation du premier degré obtenue en égalant à zéro le premier membre de l'équation précédente, en remplaçant y par y_1; cette équation résolue sera:

$$(64)\qquad y_1 = \frac{M\omega + N\omega'}{c' - c} - \frac{c'i(M\beta + N\beta' + 2P\pi)}{c' - c}.$$

Si A_2 est un nombre positif arbitraire, montrons qu'on pourra choisir les entiers M, N et P de façon que la partie réelle de y_1 soit négative et supérieure en valeur absolue à $A_1 + A_2$.

En effet, en peut prendre M et N de façon que $\dfrac{M\omega + N\omega'}{c' - c}$ ait une partie réelle aussi grande que l'on veut en valeur absolue et négative puisque le rapport $\dfrac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire. Ensuite M et N étant ainsi choisis, on prend P de façon que $M\beta + N\beta' + 2P\pi$ soit compris dans l'intervalle 0 à 2π. Il est bien clair d'après cela, qu'on peut supposer M, N, P choisis de façon que la partie réelle de y_1 soit inférieure à $-(A_1 + A_2)$.

L'équation (63) peut ensuite s'écrire de la façon suivante:

$$(65)\qquad (c - c')(y - y_1) - \varrho'(\theta\tau', \alpha') + \varrho(\tau, \alpha) = 0$$

ou encore:

$$(66)\qquad (c - c')(y - y_1)\left[1 + \frac{\varrho(\tau, \alpha) - \varrho'(\theta\tau', \alpha')}{(c - c')(y - y_1)}\right] = 0.$$

Désignons par R_1 le module de $c - c'$ et supposons qu'on fasse décrire au point y, dans le plan représentatif de cette variable, la circonférence de centre y_1 et de rayon A_2 dans le sens direct. La partie réelle de y restera inférieure à $-A_1$ puisque celle de y_1 est inférieure à $-(A_1 + A_2)$. Donc tout du long du cercle on aura:

$$|\tau| < \varepsilon_2, \qquad |\theta\tau'| < \varepsilon_2$$

et par suite, comme on l'a vu plus haut

$$|\varrho'(\theta\tau', \alpha')| < R, \qquad |\varrho(\tau, \alpha)| < R.$$

La fraction $\dfrac{\varrho(\tau, \alpha) - \varrho'(\theta\tau', \alpha')}{(c - c')(y - y_1)}$ aura donc un module inférieur à $\dfrac{2R}{R_1 A_2}$. Or R et R_1 ne dépendent nullement du choix de A_2; donc si A_2 a été pris assez grand cette fraction aura un module inférieur à un nombre fixe plus petit que 1, inférieur à $\frac{1}{2}$ par exemple. On en conclut alors, par un raisonnement classique, que l'équation (66) dont le premier membre est une fonction régulière de y a une racine à l'intérieur du cercle considéré. Par conséquent l'équation (63) a bien une racine y, de partie réelle inférieure à $-A_1$, pour le choix que nous avons fait de M, N, P. Soit y_2 cette racine. Pour $y = y_2$ les équations (62) ont une racine commune en x, soit x_2. La valeur y_2 n'est pas *particulière* car elle dépend évidemment, d'après la forme même de l'équation (63) de α et α' qui sont arbitraires. Le système de valeurs (x_2, y_2) n'est donc un point d'indétermination pour aucune des fonctions $U = \Psi_1(x, y)$, $V = \Psi_2(x, y)$, $W = \Psi_3(x, y)$.

Le système de valeurs (x_2, y_2) convient à l'équation (59) et le système de valeurs $(x_2 + M\omega + N\omega', y_2 + Mi\beta + Ni\beta' + 2Pi\pi)$ à l'équation (61), avec les inégalités requises; par conséquent, en reprenant le raisonnement du paragraphe précédent, on voit que à (x_2, y_2) correspond un point (U', V', W') de la surface $\Phi_1(U, V, W) = 0$ voisin du point (U_1, V_1, W_1) et à $(x_2 + M\omega + N\omega', y_2 + Mi\beta + {} + Ni\beta' + 2Pi\pi)$ un point (U'', V'', W'') voisin du point (U_2, V_2, W_2). Les deux points (U', V', W'), (U'', V'', W'') sont distincts, car ils sont aussi voisins qu'on le veut, (ε_1 étant arbitrairement petit) respectivement de (U_1, V_1, W_1) et (U_2, V_2, W_2) qui sont eux-mêmes distincts. Mais cela est en contradiction avec la triple périodicité de $\Psi_1(x, y)$, $\Psi_2(x, y)$, $\Psi_3(x, y)$, en remarquant que (x_2, y_2) n'est pas un point d'indétermination.

L'hypothèse faite que $c \neq c'$ est donc impossible, il faut nécessairement que $c = c'$.

Si l'on remplace c et c' par leurs valeurs et qu'on se reporte à ce que nous avons déjà vu (paragraphe 18) on voit que:

$$\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{p'}{p}.$$

Désignons par m_1, n_1 et p_1 les quotients de m, n et p par leur plus grand commun diviseur. Il est clair que m', n' et p' seront des équimultiples de m_1, n_1, p_1. Cela revient à dire que pour toutes les courbes logarithmiques de J_y, à résidus positifs, les résidus conjugués de J_x, J_y seront des équimultiples de $\frac{m_1\omega + n_1\omega'}{2i\pi}$ et de $\frac{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}{2\pi}$.

Si l'on considère une section plane quelconque, non particulière, de la surface $\Phi_1 = 0$, pour cette courbe les intégrales J_x et J_y se réduisent à des intégrales abéliennes, que nous désignons par (J_x) et (J_y); la somme des résidus positifs, multipliés par $2i\pi$, de (J_y) est de la forme $N_1(m_1 i\beta + n_1 i\beta' + 2p_1 i\pi)$ et la somme des résidus correspondants de J_x, multipliés par $2i\pi$, est de la forme $N_1(m_1\omega + n_1\omega')$ où N_1 est un entier. D'une façon analogue, on aura, en considérant les résidus négatifs de (J_y) les sommes $N_2(m_2 i\beta + n_2 i\beta' + 2p_2 i\pi)$ et $N_2(m_2\omega + n_2\omega')$. En remarquant que (J_x) ne peut pas devenir infinie sans que (J_y) le devienne, c'est-à-dire que (J_x) n'a pas de point logarithmique en dehors de ceux qu'on vient de considérer, on peut écrire, la somme des résidus d'une intégrale abélienne étant nulle:

$$N_1(m_1\omega + n_1\omega') + N_2(m_2\omega + n_2\omega') = 0,$$

$$N_1(m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi) + N_2(m_2\beta + n_2\beta' + 2p_2\pi) = 0.$$

Or N_1 et N_2 ne peuvent pas être nuls car (J_y) a au moins un point logarithmique, comme nous l'avons déjà montré. On tire de là, par un calcul déjà fait (paragraphe 18):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

et comme les numérateurs sont premiers entre eux ainsi que les dénominateurs on voit que

$$m_1 = \pm m_2, \quad n_1 = \pm n_2, \quad p_1 = \pm p_2.$$

Donc tous les résidus conjugués pour J_x et J_y sont des équimultiples de $\frac{m_1\omega + n_1\omega'}{2i\pi}$ et de $\frac{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}{2\pi}$, qu'il s'agisse de résidus positifs ou de résidus négatifs pour J_y.

Il en résulte que la différence $J_x - cJ_y$ a *tous* ses résidus nuls. Comme elle n'a pas de singularités polaires, c'est une intégrale de première espèce.

Si nous posons à nouveau

$$X = x - \frac{m_1\omega + n_1\omega'}{i(m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi)}y,$$

$$Y = \frac{2\pi}{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}y,$$

puis:

$$X = J_x - \frac{m_1\omega + n_1\omega'}{i(m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi)}J_y = K_X,$$

$$Y = \frac{2\pi}{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}J_y = K_Y$$

K_X est une intégrale de première espèce; comme les résidus de J_y sont des multiples de $\frac{m_1\beta + n_1\beta' + 2p_1\pi}{2\pi}$ ceux de K_Y sont tous des nombres entiers.

42. Il est facile maintenant de mettre en évidence une propriété remarquable des zéros et pôles de U, V, W considérées comme fonctions de X et Y.

Nous supposons, pour simplifier les raisonnements que les sections planes de $\Phi_1(U, V, W) = 0$ définies par $U = 0$; $V = 0$; $W = 0$, sont des courbes qui ne se décomposent pas en plusieurs autres; cela ne restreint pas la généralité puisqu'on pourrait toujours effectuer sur la surface une transformation homographique, sans rien changer à ce qui précède.

Nous désignerons par $U(X, Y)$, $V(X, Y)$, $W(X, Y)$ les fonctions méromorphes obtenues en considérant U, V, W comme fonctions de X et Y.

Si dans K_X et K_Y, on suppose $U = 0$, ces intégrales se réduisent à deux intégrales abéliennes $(K_X)_U$, $(K_Y)_U$ relatives à la courbe $U = 0$ de la surface $\Phi_1(U, V, W) = 0$ et les équations

$$(67) \qquad \begin{cases} X = (K_X)_U \\ Y = (K_Y)_U \end{cases}$$

définissent une multiplicité simple de zéros appartenant à $U(X, Y)$, lorsque le point (U, V, W) se déplace sur toute la courbe $U = 0$. Remarquons que $U(X, Y)$ admet aussi toutes les multiplicités de zéros qui se déduisent de la précédente par l'addition à X et à Y des sommes de multiples des périodes que l'on peut prendre sous la forme $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$.

Nous allons montrer que, parmi toutes ces multiplicités, il n'y en a qu'un nombre fini de distinctes.

En effet, l'intégrale $(K_X)_U$ est de première espèce et ne se réduit pas à une constante puisque la courbe $U = 0$ n'est pas une courbe plane particulière sur la surface et que K_X n'est pas une constante puisqu'elle admet certainement les périodes ω_1 et ω_2 (comme on le voit en faisant varier x et y, d'un système de valeurs x_0, y_0 arbitraire jusqu'à un système de valeurs $x_0 + m\omega + n\omega'$, $y_0 + mi\beta + ni\beta' + 2\,pi\pi$). Donc l'intégrale de première espèce $(K_X)_U$ a deux modules de périodicité distincts Ω_1, Ω_2 de rapport imaginaire et de la forme:

$$\Omega_1 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2,$$
$$\Omega_2 = \mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2$$

(λ_1, λ_2, μ_1 et μ_2 étant quatre entiers qui forment un déterminant différent de zéro) et tels que tous ses autres modules de périodicité sont des sommes de multiples de Ω_1 et Ω_2.

$(K_Y)_U$ admettra des modules de périodicité, correspondant à Ω_1 et Ω_2 de la forme

$$iB_1 = i(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + 2\lambda_3\pi),$$
$$iB_2 = i(\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + 2\mu_3\pi).$$

Elle admettra, en outre, nécessairement des périodes auxquelles correspondront zéro pour $(K_X)_U$ et qui seront des multiples de $2i\pi$, puisque l'intégrale $(K_Y)_U$ a au moins un point logarithmique dont le résidu est entier. Tous les modules de cette nature pour (K_Y) seront tous les multiples entiers d'un certain multiple entier de $2i\pi$; soit $2\nu i\pi$ ce multiple. Les intégrales $(K_X)_U$, $(K_Y)_U$ admettront donc les trois systèmes de modules conjugués: (Ω_1, iB_1), (Ω_2, iB_2), $(0, 2\nu i\pi)$ tels que tous leurs autres modules de périodicité conjugués seront des sommes de multiples entiers des précédents. Or ces trois systèmes de périodes se déduisent des trois systèmes $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, $(0, 2i\pi)$ par la transformation dont le déterminant est:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \nu \end{vmatrix} = \nu(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1).$$

Si l'on pose $\delta = \nu(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$, il y aura parmi les multiplicités de zéros qui se déduisent de (67) par addition des multiples de $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta)$, $(0, 2i\pi)$ en tout δ multiplicités distinctes.[1]

[1] Car parmi les homologues d'un point (x, y) relativement aux trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$ il y en a δ qui sont distincts relativement aux trois systèmes de périodes $(0, 2\nu i\pi)$, (Ω_1, iB_1), (Ω_2, iB_2).

La fonction $U(X, Y)$ a donc δ multiplicités simples de zéros et n'admet pas d'autres zéros. Remarquons que $U(X, Y)$ ne saurait admettre un multiplicité de zéros doubles si $U = 0$ est une section plane quelconque de la surface; en effet la même circonstance ne pourrait pas se présenter pour la fonction $U(X, Y) - h$, où h est une constante *quelconque*, d'après un raisonnement déjà fait.

Cherchons maintenant, pour la multiplicité simple (67) quelles sont les valeurs de Y qui correspondent à une valeur donnée de X. Il nous suffira, pour cela, d'appliquer un théorème de M. E. PICARD, à l'intégrale de première espèce $(K_X)_U$ qui n'a que deux périodes distinctes. D'après ce théorème à chaque valeur finie X_0 de X correspondent N points de la courbe $U = 0$, N étant un entier déterminé. A chacun de ces points correspondront pour y une valeur y_n $(n = 1, 2, \ldots N)$ et toutes celles qui s'en déduisent en ajoutant des multiples de $2\nu i\pi$: il n'y a pas à ajouter de multiples de iB_1 et de iB_2, car sans cela il faudrait ajouter à X_0 les multiples correspondants de Ω_1 et Ω_2. Donc à $X = X_0$ correspondent pour e^Y seulement N valeurs.

On voit bien facilement que chacune des déterminations de e^Y, considérée comme fonction de X ne peut admettre d'autres singularités que des points singuliers algébriques (pôles ou simplement points de ramification) pour toute valeur finie de X. Il en résulte que les fonctions entières symétriques simples des N déterminations de e^Y, qui sont des fonctions uniformes de X, se réduisent à des fonctions méromorphes de X. Par suite, la multiplicité (67) a une équation de la forme:

$$P_1(e^Y) = 0$$

où P_1 est un polynôme entier de degré N en e^Y; les coefficients sont des fonctions entières de X, qui n'admettent pas de facteur *commun;* c'est-à-dire qu'ils ne sont pas divisibles par une même fonction entière de X qui s'annule.

Il en sera de même pour ce qui concerne les $(\delta - 1)$ autres multiplicités de zéros de $U(X, Y)$. L'équation de l'ensemble des δ multiplicités aura donc la forme:

$$Q(e^Y) = 0$$

Q étant un polynôme analogue à P_1 de degré $N\delta$.

Cette dernière équation donne, d'après ce qui précède tous les zéros de $U(X, Y)$. Il est clair que les pôles de $U(X, Y)$ seront donnés d'une façon analogue par une équation

$$Q_1(e^Y) = 0$$

analogue à la précédente, car on peut changer U en $\frac{1}{U}$ dans l'équation de la surface.

Soit:

$$Q(e^Y) = \sum_{p=0}^{p=\delta N} A_p(X) e^{pY}$$

le polynôme Q ordonné suivant les puissances de e^Y.

Les zéros de $Q(e^Y)$ admettent les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$. On aura donc comme au paragraphe (28) les identités:

$$(68) \quad \begin{aligned} A_p(X+\omega_1) &= e^{g_1(X) - pi\beta_1} A_p(X) \\ A_p(X+\omega_2) &= e^{g_2(X) - pi\beta_2} A_p(X). \end{aligned}$$

En multipliant $Q(e^Y)$ par une fonction entère de X qui ne s'annule pas, on peut supposer que dans les formules précédentes $g_1(X) = 0$ et $g_2(X) = aX + b$ où a et b sont deux constantes; si nous posons

$$Q(e^Y) = R_1(X, e^Y)$$

nous pouvons supposer que l'on a les identités:

$$(69) \quad \begin{aligned} R_1(X+\omega_1, e^{Y+i\beta_1}) &= R_1(X, e^Y) \\ R_1(X+\omega_2, e^{Y+i\beta_2}) &= e^{aX+b} R_1(X, e^Y). \end{aligned}$$

Si $m_{1,2}$ est l'entier caractéristique de la fonction U relatif aux systèmes de périodes $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, il sera aussi l'entier caractéristique pour $R_1(X, e^Y)$; par suite

$$a = -\frac{2i\pi m_{1,2}}{\omega_1}.$$

De la même façon, pour les pôles de U, on pourra multiplier $Q_1(e^Y)$ par une fonction entière de X, ne s'annulant pas de sorte que le produit $R_2(X, e^Y)$ satisfera aux identités:

$$(70) \quad \begin{aligned} R_2(X+\omega_1, e^{Y+i\beta_1}) &= R_2(X, e^Y) \\ R_2(X+\omega_2, e^{Y+i\beta_2}) &= e^{aX+b'} R_2(X, e^Y) \end{aligned}$$

où a est la même constante $-\frac{2i\pi m_{1,2}}{\omega_1}$ que plus haut; b' est une autre constante.

Le quotient $\frac{R_1(X, e^Y)}{R_2(X, e^Y)}$ admettra les mêmes zéros et les mêmes pôles que $U(X, Y)$ et par suite nous pouvons poser:

$$U(X, Y) = \frac{R_1(X, e^Y)}{R_2(X, e^Y)} e^{H(X, Y)}$$

où $H(X, Y)$ est une fonction entière de X et Y; $U(X, Y)$ admettant les trois systèmes de périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega_1, i\beta_1)$, $(\omega_2, i\beta_2)$, il résulte de (69) et (70) les identités:

$$e^{H(X+\omega_1,\, Y+i\beta_1)} = e^{H(X,\, Y)}$$

$$e^{H(X+\omega_2,\, Y+i\beta_2)} = e^{b'-b}\, e^{H(X,\, Y)}$$

$$e^{H(X,\, Y+2i\pi)} = e^{H(X,\, Y)}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques on voit que $\frac{\partial H}{\partial X}$ et $\frac{\partial H}{\partial Y}$ admettent les trois systèmes de périodes: comme ce sont des fonctions entières elles se réduisent à des constantes et par suite on a:

$$H(X, Y) = a_1 X + b_1 Y + c_1$$

a_1, b_1, c_1 étant trois constantes. Mais comme $e^{H(X, Y)}$ admet la période $2i\pi$ relativement à la variable Y, b_1 est un nombre entier. Finalement on aura:

$$U(X, Y) = \frac{e^{a_1 X + b_1 Y + c_1} R_1(X, e^Y)}{R_2(X, e^Y)}.$$

Comme b_1 est un entier, le second membre est une fonction rationnelle de e^Y, et les coefficients sont manifestement des fonctions Θ de la variable X.

On aura ensuite des expressions de même forme pour $V(X, Y)$ et $W(X, Y)$. Si nous revenons à la fonction $z = f(x, y)$, nous avons vu qu'elle est une fonction rationnelle de U, V, W. Elle sera donc elle-même une fraction rationnelle en e^Y, les coefficients étant des fonctions Θ de la variable X.

Ainsi se trouve établi le théorème qui était le but de cette dernière partie.

Note I.

Les zéros de la fonction entière $g_1(x, y)$ admettant les trois systèmes de périodes *non exceptionnels* $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$ si l'on fait le changement de variables

(1) $$X = \frac{2i\pi}{\omega} x, \qquad Y = y - \frac{i\beta}{\omega} x$$

la fonction $g_1(x, y)$ deviendra une fonction entière $G_1(X, Y)$ dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes:

$$(0,\ 2\,i\pi),\ (2\,i\pi,\ 0),\ (a,\ b)$$

en posant:

$$a = 2\,i\pi\frac{\omega'}{\omega} = \lambda_1 + \mu_1 i\,, \qquad b = i_1\beta' - \frac{i_1\beta\omega'}{\omega} = \lambda_2 + \mu_2 i. \tag{2}$$

λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 sont les parties réelles et les parties imaginaires de a et de b. Nous aurons

$$\lambda_1 \neq 0$$

puisque le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est nécessairement imaginaire.

De plus nous pouvons supposer que la fonction $G_1(X,\ Y)$ (et par suite aussi $g_1(x,y)$) a été multipliée préalablement par une fonction entière ne s'annulant pas et choisie de telle sorte que l'on ait les trois identites suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} &G_1(X,\ Y + 2\,i\pi) = G_1(X,\ Y)\\ &G_1(X + 2\,i\pi,\ Y) = e^{m_{2,1}Y}G_1(X,\ Y)\\ &G_1(X + a,\ Y + b) = e^{G_2(X,\ Y) + AX + m_{3,1}Y}G_1(X,\ Y)\end{aligned}\right. \tag{3}$$

où $m_{2,1}$, $m_{3,1}$ sont les entiers caractéristiques relatifs à $(2\,i\pi,\ 0)$ et $(0,\ 2\,i\pi)$ pour le premier, $(a,\ b)$ et $(0,\ 2\,i\pi)$ pour le second. $G_2(X,\ Y)$ est une fontion entière admettant la période $2\,i\pi$ relativement à chacune des variables X et Y; A est une constante dont il est inutile ici de préciser l'expression. C'est là, aux notations près, le résultat déjà rappelé de M. Appell. Or on peut trouver une fonction entière $H(X,\ Y)$ satisfaisant aux identités suivantes:

$$H(X + 2\,i\pi,\ Y) = H(X,\ Y + 2\,i\pi) = H(X,\ Y)$$

$$H(X + a,\ Y + b) - H(X,\ Y) = \lambda_1\frac{\partial G_2}{\partial X} + \lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial Y}.$$

(Voir à ce sujet notre Mémoire cité, page 36).

En revenant aux variables x et y, $G_2(X,\ Y)$ et $H(X,\ Y)$ deviendront respectivement $g_2(x,y)$ et $h(x,y)$ et ces deux fonctions entières satisferont aux identités suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} &g_2(x,\ y + 2\,i\pi) = g_2(x,\ y) && h(x + \omega,\ y + i_1\beta) = h(x,\ y)\\ &g_2(x + \omega,\ y + i_1\beta) = g_2(x,\ y) && h(x + \omega',\ y + i_1\beta') - h(x,\ y) = \frac{\lambda_1\omega}{2\,i\pi}\frac{\partial g_2}{\partial x}\\ &h(x,\ y + 2\,i\pi) = h(x,\ y) && \end{aligned}\right. \tag{4}$$

car il résulte des formules (2), β et β' étant réels, que $\lambda_2 = -\dfrac{\lambda_1 \beta}{2\pi}$ et par suite que l'on a:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{2i\pi}{\lambda_1 \omega}\left[\lambda_1 \frac{\partial G_2}{\partial X} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial Y}\right]. \tag{5}$$

On posera ensuite, x_0 désignant une constante

$$k(x, y) = \frac{2i\pi}{\lambda_1 \omega}\int_{x_0}^{x} h(x, y)\, dx$$

et l'on aura les identités suivantes (voir Mémoire cité page 38)

$$\left\{\begin{aligned} & k(x, y + 2i\pi) = k(x, y) \\ & k(x + \omega, y + i\beta) - k(x, y) = -\varphi(y) \\ & k(x + \omega', y + i\beta') - k(x, y) = g_2(x, y) - \psi(y) \end{aligned}\right. \tag{6}$$

où $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont deux fonctions entières de y, admettant la période $2i\pi$.

Considérons maintenant la fonction $g_3(x, y)$ définie en posant

$$g_3(x, y) = e^{-k(x, y)} g_1(x, y). \tag{7}$$

Cette nouvelle fonction satisfait aux identités suivantes qui résultent sans difficulté, des identités (3) et (6)

$$\begin{aligned} & g_3(x, y + 2i\pi) = g_3(x, y) \\ & g_3(x + \omega, y + i\beta) = e^{m_{2,1}\left(y - \frac{i\beta}{\omega}x\right) + \varphi(y)} g_3(x, y) \\ & g_3(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) + A_1 x + m_{3,1} y} g_3(x, y) \end{aligned}$$

où A_1 est une constante.

Si l'on pose ensuite:

$$g_4(x, y) = g_3(x, y)\, e^{m_{2,1}\frac{i\beta}{2\omega^2}x^2}$$

$g_4(x, y)$ satisfera aux nouvelles identités:

$$\begin{aligned} & g_4(x, y + 2i\pi) = g_4(x, y) \\ & g_4(x + \omega, y + i\beta) = e^{\varphi(y) + c_1 + m_{2,1} y} g_4(x, y) \\ & g_4(x + \omega', y + i\beta') = e^{\psi(y) + A_2 x + m_{3,1} y + c_2} g_4(x, y) \end{aligned}$$

où A_2, c_1 et c_2 sont trois nouvelles constantes.

En écrivant l'expression de l'entier caractéristique $m_{3,2}$ on obtient:

$$2\,i\pi m_{3,2} = \psi(y+i\beta) - \psi(y) + A_2\omega + m_{3,1}i\beta - \varphi(y+i\beta') + \varphi(y) - m_{2,1}i\beta'.$$

En remarquant que $\psi(y)$ et $\varphi(y)$ sont deux fonctions entières admettant la période $2\,i\pi$, et par conséquent deux séries procédant suivant les puissances positives et négatives de e^y, l'identification donne immédiatement:

$$\psi(y+i\beta) - \psi(y) = \varphi(y+i\beta') - \varphi(y)$$

et

(8) $$A_2 = \frac{m_{1,3}\,i\beta + m_{2,1}\,i\beta' + 2\,m_{3,2}\,i\pi}{\omega}.$$

Posons en outre

$$\varphi_1(y) = \varphi(y) + c_1, \qquad \psi_1(y) = \psi(y) + c_2$$

nous obtenons finalement les formules

$$\left|\begin{array}{l} g_4(x,\,y+2\,i\pi) = g_4(x,\,y) \\ g_4(x+\omega,\,y+i\beta) = e^{\varphi_1(y)+m_{2,1}y}\,g_4(x,\,y) \\ g_4(x+\omega',\,y+i\beta') = e^{\psi_1(y)+A_2x+m_{3,1}y}\,g_4(x,\,y) \end{array}\right.$$

où $\varphi_1(y)$ et $\psi_1(y)$ sont des fonctions entières admettant la période $2\,i\pi$ et satisfaisant à l'identité:

$$\varphi_1(y+i\beta') - \varphi_1(y) = \psi_1(y+i\beta) - \psi_1(y)$$

et A_2 ayant la valeur (8).

Note II.

Soit, entre les variables y et t, une relation de la forme

(1) $$y = A\,Lt + \frac{B}{t^p}\varphi(t)$$

où A et B sont deux constantes dont la seconde est supposée différente de zéro, la première pouvant être nulle; p est un entier positif, non nul; $\varphi(t)$ est une fonction de t qui, pour $t=0$, est régulière et différente de zéro; on peut supposer $\varphi(0)=1$.

Dans le plan de la variable t menons par l'origine deux demi-droites OD, OD', la première faisant avec ox un angle quelconque, mais fixe, α et la seconde fai-

sant avec ox l'angle $\alpha + \frac{2\pi}{p}$. Si t reste à l'intérieur de l'angle de OD sur OD', en prenant une détermination quelconque de Lt on aura une fonction uniforme de t, telle que le produit $t^p Lt$ tende vers zéro avec t.

Si nous écrivons alors:

$$y = \frac{B}{t^p}\left[\varphi(t) + \frac{A}{B} t^p Lt\right] \tag{2}$$

la quantité entre crochets aura pour limite 1 lorsque t tend vers zéro, puisque $\varphi(0) = 1$.

On peut donc choisir un nombre positif r, inférieur au rayon de convergence de $\varphi(t)$ et en outre assez petit pour que si

$$|t| \leq r,$$

t restant toujours dans l'angle DOD', l'argument de

$$\varphi(t) + \frac{A}{B} t^p Lt$$

reste compris entre $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, ε étant un nombre positif très petit donné à l'avance.

Sous ces hypothèses, si nous appelons d et d' les points de rencontre de OD et OD' avec le cercle ayant pour centre l'origine et r pour rayon, le point t reste à l'intérieur du secteur circulaire dod' d'angle $\frac{2\pi}{p}$ et de rayon r. Dans tout ce qui suit t sera toujours supposé à l'intérieur de ce secteur ou sur son périmètre.

Désignons par m un nombre positif, limite supérieure du module de y, lorsque t reste sur l'arc de cercle dd'. Choisissons un nombre positif M supérieur à m. Comme il résulte de l'équation (2) que y augmente indéfiniment lorsque t tend vers zéro, on peut choisir un nombre positif ϱ assez petit pour que si

$$|t| \leq \varrho$$

on ait

$$|y| > M.$$

Nous désignerons par δ et δ' les points où le cercle de centre O et de rayon ϱ coupe OD et OD'. Nous allons supposer que le point t reste à l'intérieur du contour limité par les deux arcs de cercles dd', $\delta\delta'$ et par les deux segments rectilignes $d\delta$, $d'\delta'$. Imaginons maintenant, que le point t soit sur le segment

rectiligne $d\delta$. L'argument de t est alors égal à α; désignons par β l'argument de B; celui de $\varphi(t)+\frac{A}{B}t^p Lt$ est compris, comme il a été dit, entre $-\varepsilon$ et ε. Donc l'argument de y est lui-même compris entre $\beta-p\alpha-\varepsilon$ et $\beta-p\alpha+\varepsilon$; or l'angle α, resté jusqu'ici arbitraire peut être choisi de façon que $\beta-p\alpha=0$. L'argument précédent de y est alors compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.

Si dans le plan de y nous traçons deux demi-droites $\omega\Delta$, $\omega\Delta'$ issues de l'origine ω, et correspondant aux arguments $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, les valeurs de y qui correspondent aux valeurs de t situées sur $d\delta$, seront intérieures à l'angle $\Delta\omega\Delta'$.

Si on suppose que t est sur $d'\delta'$ c'est-à-dire a un argument égal à $\alpha+\frac{2\pi}{p}$, la conclusion reste la même: les valeurs de y sont encore dans l'angle $\Delta\omega\Delta'$.

Il est maintenant facile d'étudier le contour que décrira le point y, si t parcourt dans le sens direct le contour $\delta'\delta d d'\delta'$ formé par les deux arcs de cercle et les deux segments rectilignes.

Traçons pour cela dans le plan de y les cercles de centre ω et de rayons respectifs m et M et qui couperont le premier en l et n, le second en L et N les demi-droites $\omega\Delta$ et $\omega\Delta'$.

Si t parcourt l'arc dd' dans le sens direct le module de y reste inférieur à m; y part d'un point y_1 intérieur au cercle de rayon m et intérieur à l'angle $\Delta\omega\Delta'$, et aboutit à un point y_2 situé de façon analogue, après avoir fait une fois le tour de l'origine dans le sens indirect et à l'intérieur du cercle de rayon m.

t parcourant $d'\delta'$, y reste dans l'angle $\Delta\omega\Delta'$ et parcourt un chemin y_2y_3 aboutissant au point y_3 de module supérieur à M.

t parcourant l'arc $\delta'\delta$, y parcourt un chemin y_3y_4 tout entier extérieur au cercle de rayon M et aboutissant au point y_4 intérieur à $\Delta\omega\Delta'$, après avoir fait une fois le tour de l'origine dans le sens direct. Enfin t parcourant δd, y reste dans l'angle $\Delta\omega\Delta'$ et y décrit un chemin y_4y_1 aboutissant au point initial y_1.

Désignons par U l'aire de la couronne comprise entre les deux cercles précédents de rayons M et m, et dont on a retranché toute la portion intérieure à l'angle $\Delta\omega\Delta'$.

Si y_0 est une valeur intérieure à U, il résulte de ce qui précède (il suffit de faire la figure pour s'en rendre compte) que l'argument de $(y-y_0)$ augmente de 2π lorsque t parcourt le contour $dd'\delta'\delta d$ et que par conséquent l'équation

$$y_1 = ALt + \frac{B}{t^p}\varphi(t)$$

admet en t une racine et une seule intérieure à $dd'\delta'\delta d$, et par suite évidemment, une seule dans le secteur $d'od$ (Lt ayant toujours, bien entendu, la même détermination que celle qui a été choisie au début).

Mais comme M est tout à fait arbitraire et assujetti seulement à la condition d'être supérieur à m, on voit que l'aire U peut comprendre toute la portion du plan représentatif de y, dont on a retranché les portions intérieures soit au cercle de rayon m soit à l'angle $\Delta\omega\Delta'$.

La variable y restant dans cette aire U, nous avons ainsi défini une fonction uniforme t de y satisfaisant à la relation (1). Cette fonction est évidemment régulière et *tend vers zéro lorsque y augmente indéfiniment* en restant toujours dans l'aire U.

2) Supposons que l'on ait:

$$x = \int R_1(u, v)du, \quad y = \int R_2(u, v)du,$$

où les deux intégrales sont deux intégrales abéliennes attachées à une même courbe algébrique, (u, v) étant les coordonnées d'un point de la courbe. Si un point (u_0, v_0) est un point singulier pour l'intégrale y, exprimons les coordonnées (u, v) d'un point de la courbe au voisinage de (u_0, v_0) comme fonctions régulières, pour $t = 0$, d'un certain paramètre t, $t = 0$ correspondant à (u_0, v_0), et à un point (u, v) très voisin de (u_0, v_0) ne correspondant qu'une seule valeur de t.

L'expression de y sera de la forme suivante (en choisissant l'une des déterminations de l'intégrale)

$$y = ALt + \frac{B}{t^p}\varphi(t)$$

$\varphi(t)$ étant régulière pour $t = 0$, A et B des constantes, p un entier positif qui ne sera pas nul si le point singulier n'est pas logarithmique simple ce que nous supposerons d'abord; B est alors $\neq 0$; A peut être nul. Nous retrouvons ainsi l'équation (1) du paragraphe précédent. Nous supposons que les expressions de x et de y satisfont à la relation

$$g(x, y) = 0, \tag{3}$$

où $g(x, y)$ est une fonction entière dont les zéros admettent les trois systèmes de périodes conjuguées non exceptionnels $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. Prenons dans le plan de la variable y une bande V limitée par deux parallèles à l'axe des imaginaires pures et choisies de telle sorte que la bande V ne contienne aucun point de ramification de x considérée comme fonction de y dans la relation (3).

Retranchons de la bande V, si il y a lieu, la portion qui pourrait se trouver extérieure à l'aire U définie dans le paragraphe précédent et soit V_1 ce qui reste, après cela, de V. La bande V_1 s'étend certainement jusqu'à l'infini dans les deux sens.

Nous pouvons donc supposer que y se déplace sur une parallèle G à l'axe des imaginaires située dans V_1 de telle façon que la partie imaginaire de y va en croissant au delà de toute limite.

Puisque x et y satisfont à l'équation (3), nous avons vu qu'il existe pour x considérée comme fonction de y à l'intérieur de V des augments conjugués, et par suite que $\frac{dx}{dy}$ a une période non nulle de la forme $\mu_1 i\beta + \nu_1 i\beta' + 2\varrho_1 i\pi$. Donc y parcourant la droite G, dans le sens indiqué, le point representant $\frac{dx}{dy}$ parcourt un nombre illimité de fois un contour fermé déterminé Γ; mais d'autre part, y augmentant indéfiniment, t tend vers 0 comme nous l'avons vu; donc (u, v) tend vers (u_0, v_0) et par suite

$$\frac{dx}{dy} = \frac{R_1(u, v)}{R_2(u, v)}$$

tend vers une valeur parfaitement déterminée. Il est donc nécessaire que le contour Γ se réduise à un seul point, c'est-à-dire que $\frac{dx}{dy} = \text{const.}$ On aura alors entre x et y la relation du premier degré:

$$x = \frac{\mu_1\omega + \nu_1\omega'}{\mu_1 i\beta + \nu_1 i\beta' + 2\varrho_1 i\pi} y + c \tag{4}$$

c étant une constante, et le coefficient de y se trouvant déterminé par l'existence des augments conjugués $(\mu_1\omega + \nu_1\omega', \mu_1 i\beta + \nu_1 i\beta' + 2\varrho_1 i\pi)$. Donc, l'intégrale

$$y = \int R_1(u, v)\, du$$

ne peut admettre de singularité polaire, même superposée à une singularité logarithmique que si x et y sont liées par la relation (4) c'est-à-dire si $g(x, y)$ admet une multiplicité simple de zéros fournie par (4). A part ce cas exceptionnel, l'intégrale $\int R_2(u, v)\, du$ ne peut avoir que des points logarithmiques simples.

Mais ce cas d'exception se trouve lui-même écarté dans les circonstances suivantes. Supposons que les formules précédentes

$$x = \int R_1(u, v)\, du, \qquad y = \int R_2(u, v)\, du$$

aient pour conséquence nécessaire les formules suivantes

$$u = f_1(x, y)$$
$$v = f_2(x, y),$$

où $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ sont deux fonctions méromorphes de x et y aux périodes $(0, 2i\pi)$, $(\omega, i\beta)$, $(\omega', i\beta')$. (C'est là le cas qui se rencontre aux paragraphes 34 et 39 de la 2ème partie de notre mémoire). Si nous supposons comme plus haut, que y parcourt la droite G dans le sens positif de l'axe des imaginaires, y augmentant de $\mu_1 i\beta + \nu_1 i\beta' + 2\varrho_1 i\pi$, x augmente de $\mu_1\omega + \nu_1\omega'$ et u et v reprennent les mêmes valeurs par suite de la périodicité de $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$. Donc u et v ne tendent pas vers u_0, v_0 et par suite t ne peut pas tendre vers zéro. La contradiction avec ce qui précède est évidente, et l'impossibilité d'une singularité polaire pour y se trouve démontrée dans ce cas.

Note III.

1. Considérons le système d'équations:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = \varphi(u, v), \end{cases}$$

où $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ sont deux fonctions qui pour $u = 0$, $v = 0$ sont régulières et s'annulent et qui, dans le voisinage de ce point $u = v = 0$ n'ont pas de *facteur commun*. On peut supposer que $f(0, v)$ et $\varphi(0, v)$ ne sont nuls identiquement ni l'un ni l'autre: dans le cas contraire, on effectuerait sur u et v une substitution linéaire générale, ce qui ne changerait rien aux conclusions qui suivent.

Enfin $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ sont deux fonctions indépendantes, c'est-à-dire dont le déterminant fonctionnel n'est pas nul identiquement, mais *peut s'annuler pour* $u = v = 0$.

Dans ces conditions, montrons que pour chaque système de valeurs arbitraires d' x et y, mais choisies dans un domaine assez petit défini par les inégalités

$$|x| < \varepsilon, \qquad |y| < \varepsilon$$

les équations (1) admettent un système de solutions au moins en u et v, dans un certain domaine

$$|u| < \eta, \qquad |v| < \eta$$

η pouvant être aussi petit qu'on le veut, si ε a été choisi assez petit.

En effet, comme la fonction $x-f(u, v)$ des trois variables x, u, v ne s'annule pas identiquement pour $x=0$, $u=0$, l'équation

$$x-f(u, v)=0$$

est, dans un domaine assez petit du point $u=v=x=0$, équivalente à l'équation

$$P(v)=0,$$

où $P(v)$ est un polynôme entier en v, d'un certain degré n, dans lequel le coefficient de v^n est l'unité, tous les autres coefficients étant des fonctions régulières de u et x pour $u=x=0$ et s'annulant pour ce système de valeurs.

De la même façon, l'équation

$$y-\varphi(u, v)=0$$

peut être remplacée par l'équation équivalente

$$Q(v)=0,$$

où $Q(v)$ est analogue à $P(v)$.

Entre les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} P(v)=0 \\ Q(v)=0 \end{cases}$$

on peut éliminer v et on obtient un résultant

$$R(u, x, y)=0.$$

$R(u, x, y)$ est régulière et s'annule pour $u=x=y=0$. Mais $R(u, o, o)$ n'est pas nul quel que soit u, car sans cela les équations

$$0=f(u, v)$$
$$0=\varphi(u, v)$$

auraient en v une solution commune quel que soit u, ce qui est impossible puisqu'on suppose que $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ n'ont pas de facteur commun.

Il en résulte que la relation

$$R(u, x, y)=0$$

est, dans un petit domaine du point $u=x=y=0$, équivalente à l'équation

$$(3) \qquad S(u)=0,$$

où $S(u)$ est un polynôme entier en u dont les coefficients sont, pour $x=y=0$,

des fonctions régulières et qui s'annulent, sauf le coefficient du terme du plus haut degré qui est égal à 1.

Si l'on donne à x et y dans l'équation (3) un système de valeurs arbitraires x_1, y_1 choisies dans un domaine très-petit

$$|x| < \varepsilon, \qquad |y| < \varepsilon$$

cette équation fournira au moins une valeur $u = u_1$ très-petite aussi. Le résultant des équations (2) étant nul pour $x = x_1$, $y = y_1$, $u = u_1$, ces équations admettront en v une racine commune très petite $v = v_1$, si x, y, u sont remplacés par x_1, y_1, u_1.

La propriété énoncée se trouve donc établie.

2. Considérons en second lieu le système suivant

$$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda(u, v) f(u, v) \\ y &= \lambda(u, v) \varphi(u, v), \end{aligned}\right. \tag{4}$$

où $\lambda(u, v)$, $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ sont trois fonctions régulières pour $u = v = 0$; de plus $\lambda(u, v)$ s'annule pour $u = v = 0$ et l'on suppose que $\lambda(u, v)$ est *irréductible* au voisinage de $u = v = 0$, c'est-à-dire n'est pas le produit de deux fonctions régulières et s'annulant pour $u = v = 0$; en outre on peut supposer que $\lambda(0, v)$ n'est pas nul identiquement, sans cela on effectuerait sur u et v une substitution linéaire générale. Enfin $\varphi(0, 0)$ est supposé différent de zéro, de sorte que au voisinage de $u = v = 0$, y ne peut s'annuler que si $\lambda(u, v)$ s'annule.

Dans ce qui suit nous écrirons λ, f, φ au lieu de $\lambda(u, v)$, $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ pour abréger l'écriture.

Le quotient $\dfrac{f}{\varphi}$ est une fonction régulière dans un domaine

$$|u| < \varepsilon_1, \qquad |v| < \varepsilon_1 \tag{5}$$

choisi assez petit puisque $\varphi(0, 0) \neq 0$. Posons:

$$\frac{f}{\varphi} = \psi_1; \tag{6}$$

ψ_1 sera régulière pour $u = v = 0$; soit a_1 la valeur de $\psi_1(0, 0)$; la différence $\psi_1 - a_1$ s'annule pour $u = v = 0$; supposons qu'elle soit divisible par le facteur $\lambda(u, v)$ et posons

$$\psi_1 = a_1 + \lambda f_1; \tag{7}$$

f_1 sera une fonction de u et v régulière pour $u = v = 0$.

Posons:

$$\frac{f_1}{\varphi} = \psi_2, \tag{8}$$

et a_2 étant la valeur de $\psi_2(0, 0)$, supposons que $\psi_2 - a_2$ est encore divisible par $\lambda(u, v)$, et soit

$$\psi_2 = a_2 + \lambda f_2, \tag{9}$$

f_2 étant régulière pour $u = v = 0$. Posons encore:

$$\frac{f_2}{\varphi} = \psi_3 \tag{10}$$

en appelant a_3 la valeur de $\psi_3(0, 0)$, si la différence $\psi_3 - a_3$ est aussi divisible par λ, nous poserons

$$\psi_3 = a_3 + \lambda f_3; \tag{11}$$

en poursuivant ainsi, supposons qu'on arrive à une fonction ψ_s, telle que la différence $\psi_s - a_s$ ne soit pas divisible par λ. Si cette circonstance s'était présentée pour la première différence $\psi_1 - a_1$, on aurait dans ce qui suit $s = 1$.

On a entre les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_s$ les identités suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_1 = a_1 + \lambda\varphi\psi_2 \\ \psi_2 = a_2 + \lambda\varphi\psi_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_{s-1} = a_{s-1} + \lambda\varphi\psi_s \end{array}\right. \tag{12}$$

D'où l'on tire la suivante:

$$\psi_1 = a_1 + a_2(\lambda\varphi) + a_3(\lambda\varphi)^2 + \cdots + a_{s-1}(\lambda\varphi)^{s-2} + \psi_s(\lambda\varphi)^{s-1}. \tag{13}$$

x et y étant liées à u et à v par les relations (4). l'identité précédente multipliée par $\lambda\varphi$, peut être écrite sous la forme:

$$x = a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_{s-1} y^{s-1} + y^s \psi_s. \tag{14}$$

Si $s = 1$, il n'y a pas d'identités (12), mais on a immédiatement d'après (6)

$$x = y\psi_1$$

qui rentre dans la relation (14) pour $s = 1$.

Considérons les deux équations

$$(15) \qquad \begin{cases} \alpha = \psi_s(u, v) - a_s \\ y = \lambda(u, v)\varphi(u, v) \end{cases}$$

les seconds membres sont des fonctions régulières pour $u = 0$, $v = 0$, sans facteur commun dans le voisinage de ce point. Car $\lambda(u, v)$ est le seul facteur, *irréductible* par hypothèse, du second membre de la deuxième équation et il n'appartient pas, par hypothèse, à $\psi_s(u, v) - a_s$. D'ailleurs les deux seconds membres du système (15) sont des fonctions indépendantes de u et v; car si $\psi_s(u, v)$ était fonction de y, d'après (14) x serait aussi fonction de y, et dans les équations (4) les seconds membres seraient liés par une relation, cas que nous écartons ici.

Il résulte de là, d'après le premier paragraphe de cette note, que si nous prenons pour α et y deux valeurs arbitraires α_1 et y_1 d'un domaine assez petit:

$$|\alpha_1| < \varepsilon, \qquad |y_1| < \varepsilon$$

les équations (15) admettront en u et v un système de solutions (u_1, v_1) dans un domaine très-petit

$$|u| < \eta, \qquad |v| < \eta$$

donné à l'avance. Par suite, si x_1 est la valeur de x fournie par la relation:

$$(16) \qquad x_1 = a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + \cdots + a_{s-1} y_1^{s-1} + (\alpha_1 + a_s) y_1^s$$

on aura:

$$x_1 = \lambda(u_1, v_1) f(u_1, v_1)$$
$$y_1 = \lambda(u_1, v_1)\varphi(u_1, v_1).$$

En résumé, si dans la relation (16) on prend y_1 et α_1 arbitraires mais assez petits, les équations (4) pour $x = x_1$, $y = y_1$ admettent un système de solutions en u et v appartenant au domaine

$$|u| < \eta, \qquad |v| < \eta$$

où η a été pris arbitrairement petit.

Nous avons supposé, pour parvenir à ce resultat, que, après un certain nombre d'opérations, on parvenait à une fonction ψ_s telle que $\psi_s - a_s$ ne soit pas divisible par $\lambda(u, v)$. Montrons maintenant qu'il en est toujours ainsi.

Si dans les équations (4) on remplace u et v par deux fonctions *arbitraires* d'un paramètre t, régulières pour $t = 0$ et s'annulant pour cette valeur, pour des valeurs assez petites de t les seconds membres seront des fonctions régulières de t, et x et y se présentent ainsi comme fonctions régulières d'un seul paramètre. On peut alors considérer x comme fonction de y, et le développer, comme

on sait, suivant les puissances entières et positives de $(y)^{\frac{1}{p}}$ p étant un entier positif. Or les premiers termes du développement sont manifestement donnés par la formule (14) jusqu'au terme en y^{s-1} inclusivement. Si on ne parvient pas à une fonction ψ_s, telle que $\psi_s - a_s$ ne soit pas divisible par $\lambda(u, v)$, on pourrait avoir tous les termes du développement de x suivant les puissances de y; cela revient à dire que x serait toujours la même fonction de y quelles que soient les deux fonctions de t qui remplacent u et v. Mais alors il y aurait évidemment une relation entre x et y considérées comme fonctions de u et v, hypothèse que nous avons écartée.

BIBLIOGRAPHIE.

J. A. Barth.

Leipzig 1909.

Poincaré, H., Die Maxwellsche Theorie und die Hertzschen Schwingungen. Die Telegraphie ohne Draht. Aus dem Französischen übers. von Max Iklé. — 199 p. 8. M. 3,20 (geb.).

Allgemeines üb. die elektr. Erscheinungen. Die Maxwellsche Theorie. Die elektr. Schwingungen vor Hertz. Der Hertzsche Erreger. Hilfsmittel der Beobachtung. Der Kohärer. Fortpflanzung längs eines Drahtes. Messung der Wellenlänge und multiple Resonanz. Fortpflanzung in Luft. Fortpflanzung in Dielektriken. Erzeugung sehr schneller und sehr langsamer Schwingungen. Nachahmung der optischen Erscheinungen. Synthese des Lichtes. Das Prinzip der drahtlosen Telegraphie. Anwendungen der drahtlosen Telegraphie.

Righi, A., Strahlende Materie und magnetische Strahlen. Mit Zusätzen des Verfassers für die deutsche Ausgabe aus dem Italienischen übers. von Max Iklé. — VIII+390 pp. 8.

Strahlen negativer Elektronen. Strahlen positiver Ionen. Die Möglichkeit des Vorkommens anderer Arten strahlender Materie. — Entladungen im Magnetfelde. Versuchsanordnungen. Von strahlender Materie in einem Magnetfelde transportierte Ladungen. Magnetische Strahlen im inhomogenen Felde. Erzeugung und Wirkungen der magnetischen Strahlen. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen.

Cambridge University Press.

1908—09.

Bôcher, M., An introduction to the study of integral equations. (Cambridge tracts in mathematics and mathem. physics. No. 10.) — 71 pp. 8. Sh. 2. 6 d.

Brown, E. W., The inequalities in the motion of the moon due to the direct action of the planets. An essay which obtained the Adams prize in the University of Cambridge for the yeer 1907. — XII+92 p. 8.

General scheme of notation. The equations of variations. Transformation of the disturbing function. Development of the disturbing function. A sieve for the rejection of insensible coefficients. Auxiliary numerical tables. The inequalities in the coordinates. Final values for the terms in longitude.

EUCLIDES, The thirteen books of Euclid's elements, transl. from the text of Heiberg with introduction and commentary by T. L. Heath. Vol. 1—3. — X+424, 436 & 554 pp. 8. Sh. 42— (cloth).

1. Introduction and books 1, 2.
2. Books 3—9.
3. Books 10—13 and appendix.

GODFREY, C., and SIDDONS, A. W., Modern geometry. — XVI+162 p. 8. Sh. 4. 6 d.

The sense of a line. Infinity. The centroid. The triangle. The theorems of Ceva and Menelaus. Harmonic section. Pole and polar. Similitude. Miscellaneous properties of the circle. The radical axis: coaxal circles. Inversion. Orthogonal projection. Cross-ratio. Principle of duality; complete quadrilateral and quadrangle.

GODFREY, C., and SIDDONS, A. W. Solutions of the exercises in modern geometry. — 124 p. 8. Sh. 4— (cloth).

JEANS, J. H., The mathematical theory of electricity and magnetism. — VIII+536 p. 8. Sh. 15— (cloth).

The three divisions of electromagnetism. Electrostatics and current electricity. Magnetism. Electromagnetism.

LOVE, A. E. H., Elements of the differential and integral calculus. — XIV+207 p. 8. Sh. 5— (cloth).

Introductory. Differentiation. Some applications of differentiation. Integration. Some applications of integration. Logarithms and the exponential function. Trigonometric functions. Methods of integration. Various results connected with arcs of curves. The definite integral as the limit of a sum. Some applications of definite integrals to mechanics. Appendix.

PICKFORD, A. G., Elementary projective geometry. — XII+256 p. 8. Sh. 4— (cloth).

Cross-ratio. Involution. Projective rows aud pencils. The circle. Conics. Polars. Inscribed and circumscribed polygons. Constructions. Classes of conics. Reciprocation. Homology.

THOMSON, J. J., Elements of the mathematical theory of electricity and magnetism. 4:th ed. — VIII+550 p. 8. Sh. 10— (cloth).

General principles of electrostatics. Lines of force. Capacity of conductors. Condensers. Specific inductive capacity. Electrical images and inversion. Magnetism. Terrestrial magnetism. Magnetic induction. Electric currents. Magnetic force due to currents. Electromagnetic induction. Electrical units: dimensions of electrical quantities. Dielectric currents and the electromagnetic theory of light. Thermoelectric currents. The properties of moving electric charges.

Bruno Cassirer.

Berlin 1909.

SIMON, M., Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte. — XVII+401 pp. 8.

The Clarendon Press.

Oxford 1909.

Coolidge, J. L., The elements of non-euclidean geometry. — 291 p. 8. Sh. 15— (cloth).

Foundation for metrical geometry in a limited region. Congruent transformations. The three hypotheses. Trigonometric formulæ. Analytic formulæ. Consistence and significance of the axioms. Geometric and analytic extension of space. Groups of congruent transformations. Point, line and plane, treated analytically. Higher line-geometry. The circle and the sphere. Conic sections. Quadric surfaces. Areas and volumes. Introduction to differential geometry. Differential line-geometry. Multiply connected spaces. Projective basis of non-euclidean geometry. Differential basis for euclidean an non-euclidean geometry.

Imprensa da Universidade.

Coimbra 1909.

Teixeira, F. G., Obras sobre mathematica. Publ. por ordem do governo português. Vol. 5. — 497 p. 4.

Carl Fromme.

Wien 1908.

Dolinski, M., Algebra und politische Arithmetik. — IV + 340 pp. 8. Kr. 5— (geb.).

Die Rechnungsarten der 1., 2. und 3. Stufe. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades. Reihen. — Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Prämienberechnungen für einfache Leben. Berechnung der Prämienreserven. Rückkauf und Reduktion von Versicherungen. Prämienberechnungen für verbundene Leben. Berechnung der Prämienreserve f. verb. Leben. Die Bilanz und die Rechnungslegung. Aufgabensammlung. Tabellen.

Ludwig, W., Lehrbuch der politischen Arithmetik. — IV + 188 p. 8. Kr. 3,80 (broschiert).

Zinsen- und Annuitäten-Rechnung. Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Lebensversicherung. Aufgaben-Sammlung. — Hilfstabellen.

Giovanni Gallizio.

Torino 1909.

Burali-Forti, C., & Marcolongo, R. Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica. — XI + 115 pp. 8. L. 4—.

Gauthier-Villars.

Paris 1908—10.

André, D., Des notations mathématiques. Énumération, choix et usage. — XVIII + 501 pp. 8. Fr. 16—.

Annuaire pour l'an 1910, publ. par le Bureau des Longitudes. — V + 756 pp. 16. Fr. 1,50.

Baillaud, B., Notice sur la réunion du Comité international de la carte du ciel. *Lallemand, Ch.*, Les marées de l'écorce et l'élasticité du globe terrestre.

Autonne, L., Sur les groupes de matrices linéaires non invertibles. (Annales de l'univ. de Lyon. Nouv. sér. 1. Fasc. 25.) — 78 p. 8.

Multiplication et division des tableaux et des matrices. Propriétés générales d'une matrice ayant un rang donné. Groupes à noyau.

Blumenthal, O., Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction de M. Émile Borel.) — VI + 150 pp. 8. Fr. 5,50.

Historique. Sur le mode de croissance des fonctions entières. La croissance des fonctions continues et les fonctions-types. L'ordre des fonctions entières et la distribution de leurs valeurs. Théorie générale des produits canoniques. Exemples et compléments critiques. Théorèmes divers sur les fonctions complètes. Les fonctions complètes et le théorème de M. Picard. Théorie générale des fonctions-types. Les fonctions-types minima. Le facteur primaire de Weierstrass.

Borel, E., Leçons sur la théorie de la croissance, professées à la Faculté des sciences de Paris. Recueillies et rédigées par Arnaud Denjoy. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction de M. Émile Borel.) — VI + 168 pp. 8. Fr. 5,50.

Notions sur les suites et sur la croissance. La notation des ordres-types de croissance. Les fonctions à croissance régulière. Différentiation et intégration des ordres de croissance. Applications analytiques. Applications arithmétiques.

Darboux, G. — Biographie, bibliographie analytique des écrits, par *Ernest Lebon*. [Avec portrait.] — VIII + 72 pp. 8.

Fouët, E. A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. 2e éd., entièrement refondue. T. 2: Les fonctions algébriques. Les séries simples et multiples. Les intégrales. — XI + 265 pp. 8.

Méthodes générales de définition et de représentation des fonctions: Fonctions algébriques. Fonctions définies par des séries. Fonctions définies par des séries multiples.

Guyou, E., Note sur les approximations numériques. 3:e éd. — 30 pp. 8.

Haton de la Goupillière, J. N., Mémoires divers. 2.e éd. — 51 pp. 4.

De la courbe qui est sa propre podaire. Tautochronisme des épicycloïdes quand on a égard au frottement. De la similitude en thermologie. Théorèmes relatifs à l'actinométrie des plaques mobiles. Des centres de courbure successifs. Centre des moyennes distances des centres de courbure successifs.

Picard, E., Traité d'analyse. 2:e éd. T. 3, fasc. 2. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.) — 268 p. 8.

Sur les transcendantes uniformes déduites de l'équation différentielle hypergéométrique. Sur certaines éq. diff. lin. irrégulières à l'infine. Quelques classes d'équations diff. intégrables. Théorie des substitutions et des équations algébriques. Analogies entre la théorie des éq. diff. lin. et celle des éq. algébriques.

Poincaré, Henri. — Biographie, bibliographie analytique des écrits, par *Ernest Lebon*. [Avec portrait.] — VIII+80 pp. 8.

Poincaré, H., Leçons de mécanique céleste, professées à la Sorbonne. T. 2, 2e partie: Théorie de la lune. — 136 p. 8.

Généralités sur la théorie de la lune. La variation. Mouvement du noeud. Mouvement du périgée. Termes d'ordre supérieur. Seconde méthode. Action des planètes. Accélérations séculaires.

Riquier, Ch., Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. — XXVI+590 pp. 8. Fr. 20—.

Continuité. Séries en général et séries entières. Fonctions olotropes et leurs dérivées; composition des fonctions olotropes. Généralités sur le calcul des fonctions par cheminement. Fonctions schématiques et coupures. Calcul inverse de la dérivation. Systèmes orthonomes. Fonctions implicites. Simplification et extension des résultats obtenus sur les systèmes orthonomes: propositions préliminaires, théorèmes d'existence. Application des théories précédentes à l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles auxquels conduisent: 1° L'étude des déformations finies d'un milieu continu dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions; 2° La détermination des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales à un nombre quelconque de variables. Systèmes différentiels où les conditions initiales présentent une disposition régulière. Systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. Réduction d'un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable.

Salvert, Vte de, Mémoire sur l'attraction du parallélipipède ellipsoïdal. Fasc. 1. — 250+84 pp. 8.

Exposé général du sujet et position du problème analytique. Le point attiré coïncide avec le centre du système ellipsoïdal. Le point attiré étant situé dans un plan principal du système ellipsoïdal, expression de la composante normale au dit plan principal. Le point attiré étant situé sur un axe de symétrie du système ellipsoïdal, expressions définitives des deux composantes normales au dit axe de symétrie. Appendice.

Serret, J. A., Traité de trigonométrie. 9:e éd. — X+336 p. 8.

Éléments de la théorie des fonctions circulaires. Des tables trigonométriques. Trigonométrie rectiligne. Trigonométrie sphérique. Complément de la théorie des fonctions circulaires. De la résolution des triangles par la voie des séries et des formules trigonométriques différentielles.

Xavier, A., Théorie des approximations numériques et du calcul abrégé. — 281 p. 8. Fr. 10—.

Introduction. Du degré de précision dans l'évaluation d'une formule. Calcul abrégé et calcul approché. Séparation des racines des équations numériques quelconques. Méthode d'évaluation des racines incommensurables, ébauchée par Newton et constituée par Fourier. De l'extraction des racines des nombres. Théorie des logarithmes. Des courbes des erreurs.

E. van Goethem.

Gand 1908.

Stuyvaert, M., Cinq études de géométrie analytique. Application diverses de la théorie des matrices et de l'élimination. (Extrait des Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. Sér. 3. T. 7.) — VI+230 p. 8.

Applications géométriques de la théorie des matrices. Congruences de variétés algébriques annulant des matrices. La théorie des matrices dans l'espace réglé. Sur une forme doublement quadratique binaire et symétrique. Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques.

G. J. Göschen.

Leipzig 1908—09.

Fischer, Paul B., Determinanten. (Sammlung Göschen 402.) — 134 p. 8. M. 0,80 (geb.).

Frommel, W., Radioaktivität. (Sammlung Göschen 317.) — 94 pp. 8. M. 0,80 (geb.).

Haussner, R., Darstellende Geometrie. T. 1—2. (Sammlung Göschen 142—143.) — 207 u. 164 p. 8. Je 0,80 M. (geb.).

1: Elemente ebenflächiger Gebilde.
2: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte.

Meyer, W. Fr., Allgemeine Formen- und Invariantentheorie. Bd 1: Binäre Formen. (Sammlung Schubert 33). — VIII+376 pp. 8. M. 9,60 (geb.).

Quadratische und bilineare Formen und deren Invarianten. Differentialgleichungen für invariante Bildungen binärer Formen.

Schubert, H., Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. (Sammlung Göschen 81.) — 128 pp. 8. M. 0,80 (geb.).

Wangerin, A., Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Bd 1. (Sammlung Schubert 58). — VIII+255 pp. 8. M. 6,60 (geb.).

Das Potential und seine charakteristischen Eigenschaften. Erweiterungen des Potentialbegriffs. Potential und Anziehung homogener Ellipsoide.

Fr. Grub.

Stuttgart und Berlin 1909.

Zaboudski, N., Untersuchungen über die Bewegung der Langgeschosse. Übers. von Ritter von Eberhard. — VI+154 pp. 8.

Ableitung der Differentialgleichungen der Rotationsbewegung der Langgeschosse. Die Integration der Differentialgleichungen, welche die Lage der Geschossachse bezüglich der Bahntangente bestimmen. Die Differentialgleichungen der translatorischen Bewegung der Langgeschosse. Anwendung der erhaltenen Formeln auf die Berechnung von Zahlenbeispielen. Von den kanonischen Diff.-gl. d. Bewegung. Kanonische Gleichungen der Rotationsbewegung der Langgeschosse. Herleitung d. Diff.-gl. d. Rotationsbewegung der Langgeschosse, wenn man den Luftwiderstand als Störungsursache einführt.

Gyldendalske Boghandel.

København 1909.

Hansen, P. C. V., Lærebog i Differential- og Integralregning. — 469 pp. 8.

A. Hermann & fils.

Paris 1909—10.

Adhémar, R. d', L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et de Neumann. — 71 pp. 8.

Cosserat, E., et Cosserat, F., Théorie des corps déformables. — VI+226 p. 8. Fr. 6—.

Considérations générales. Statique de la ligne déformable. Statique de la surface déformable et dynamique de la ligne déformable. Statique et dynamique du milieu déformable. L'action euclidienne à distance. L'action de contrainte et l'action dissipative. L'action euclidienne au point de vue culérien.

Fabry, E., Problèmes et exercices de mathématiques générales. — 420 pp. 8. Fr. 10—.

Algèbre. Géométrie analytique. Analyse. Mécanique.

Hadamard, J., Leçons sur le calcul des variations. Recueillies par M. Fréchet. (Cours du Collège de France). T. 1: La variation première et les conditions du premier ordre. Les conditions de l'extremum libre. — VIII+520 pp. 8. Fr. 18—.

Notions préliminaires. La position du problème. La variation première et les conditions du premier ordre. Les conditions de l'extremum libre.

Ulrico Hoepli.

Milano 1909.

Brioschi, Fr., Opere matematiche. Publ. per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. T. 5. — XII+556 p. 4. L. 30—.

Loria, G., Metodi di geometria descrittiva. (Manuali Hoepli 192—193). — XVI +325 pp. 8. L. 3—.

Metodo della doppia projezione ortogonale (metodo di Monge). Metodo della projezione centrale. Metodo dei piani quotati. Assonometria teorica. Fotogrammetria teorica.

Pascal, E., Esercizii critici di calcolo differenziale e integrale. 2:a ed. riveduta. (Manuali Hoepli 200—201). — XV+275 pp. 8. L. 3—.

Andr. Fred. Høst & Søn.

Köbenhavn 1909.

Festskrift til H. G. Zeuthen fra Venner og Elever i Anledning af hans 70 aars Fødselsdag 15. Februar 1909. — 156 p. 8.

A. A. Bjornbo: Al-Chwârizmî's trigonometriske Tavler. — *S. A. Christensen:* Studiet af Euclids Elementer i Danmark. — *C. Crone:* Om en Transformation, hvorved nogle Kurver af 4[de] Orden og Slægten 3 gaar over i sig selv. — *J. P. Gram:* Nogle Bemaerkninger om Fermat's Taltheorie. — *J. L. Heiberg:* Deúterai frontides. — *J. Hjelmslev:* Om Rum af uendelig mange Dimensioner. — *J. L. W. V. Jensen:* Bidrag til Kædebrøkernes Teori. — *C. Juel:* Nogle Opgaver med uendelig mange Løsninger. — *Oluf Kragh:* Den relative Bevægelses Differentialligninger. — *Johannes Mollerup:* Bevis for de Cantorske Talklassers Eksistens. — *Niels Nielsen:* Bidrag til en almindelig teori for de af Franz Neumann angivne rækkendviklinger efter kuglefunktioner af anden art. — *Erik Schou:* Bidrag til Løsningen af Jacobi's Inversionsproblem. — *E. Valentiner:* Om Beliggenheden af Spidser paa Kurver af 6[te] Orden. — *H. Valentiner:* Om Bestemmelsen af Polygoner, der paa en Gang ere om- og indskrevne i almindelige plane Kurver af 3[die] Orden

Mayer & Müller.

Berlin 1909.

Fuchs, L., Gesammelte mathematische Werke. Bd 3: Abhandlungen (1888—1902) und Reden. Redigirt von Richard Fuchs. — X+460 pp. 4. Preis kartonniert M. 28—. Original-Halbfranzband M. 32,50. Schreibpapier M. 38—.

Schering, Ernst, Gesammelte mathematische Werke. Hrsg. von Robert Haussner und Karl Schering. Bd 2. — VIII+472 p. 4. M. 25— (cart.).

Viggo Møller.

Köbenhavn 1909.

Juel, C., Forelæsninger over rationel mekanik ved den Polytekniske Læreanstalt. — 451 p. 4.

Statik. Kinematik. Dynamik.

E. Speidel.

Zürich 1909.

Bojko, J., Neue Tafel der Viertelquadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20000 zur Bildung aller möglichen Produkte im Bereiche 1×1 bis 10000×10000. — 40 pp. 8. Fr. 1,50.

B. G. Teubner.

Leipzig und Berlin 1909—10.

Ahrens, W., Matematische Unterhaltungen und Spiele. 2:e, vermehrte u. verbesserte Aufl. Bd 1. — IX+400 pp. 8. M. 7,50 (geb.).

Dingeldey, F., Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. T. 1: Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern d. Math. Wiss. Bd 32: 1.) — IV+202 pp. 8. M. 6— (geb.).

Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. Bd 4: Dynamik. 3:te stark veränderte Aufl. — VIII+422 p. 8.

Dynamik des materiellen Punktes. Aufgaben zum ersten Abschnitt. Dynamik des Punkthaufens. Dynamik des starren Körpers. Schwingungen elastischer Körper. Aufgaben zum 2., 3. und 4. Abschn. Die Relativbewegung. Aufg. zum 5. Abschn. Hydrodynamik. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Gans, R., Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die matematische Physik. 2:e Aufl. — X+125 pp. 8.

Die elementaren Operationen der Vektoranalysis. Die Differentialoperationen der Vektoranalysis. Krummlinige Koordinaten. Vektorzerlegungen. Mechanische Deformationen. Tensoren. Anwendungen aus der Hydrodynamik und der Elektrodynamik.

Grassman, H., Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. Bd 1: Binäres. XII+360 p. 8. M. 13— (geb.). —

Hülfsmittel aus der Punktrechnung. Grundlagen der projektiven Geometrie. Die Projektivitäten in der Geraden und im Strahlbüschel.

Höfler, A., Didaktik des mathematischen Unterrichts. Mit zwei Tafeln und 147 Figuren im Text. (Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen. Bd 1.) — XVIII+509 pp. 8. M. 12— (geb.).

Ziele und Wege des mathematischen Unterrichts. Lehrproben. Lehrgänge. Lehrpläne. Anhang zur Didaktik der zwei obersten Jahrgänge. Rest- und Grenzfragen der math. Didaktik an die Psychologie, die Erkenntnislehre u. an die allgemeine Didaktik als Bildungslehre.

Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. T. 2: Geometrie. Vorlesung gehalten im Sommersemester 1908. Ausgearb. von E. Hellinger. — 515 p. 4. M. 7,50.

Die einfachsten geometrischen Gebilde. Die geometrischen Transformationen. Systematik und Grundlegung der Geometrie. Vom Unterricht in der Geometrie nach seiner Entwicklung in den verschiedenen Ländern.

Landau, E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bd 1—2. — XVIII+564, XI+397 pp. 8. Bd 1: M. 20— (geh.), M. 21— (geb.). Bd 2: M. 14— (geh.), M. 15— (geb.).

1: Historische Übersicht über die Entwicklung des Primzahlproblems. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression.

2: Die Funktion $\mu(n)$ und die Verteilung der quadratfreien Zahlen. Die Funktion $\mu(n)$ und die Verteilung der quadratfreien Zahlen in einer arithmetischen Progression. Andere Primzahlprobleme. Theorie der Dirichletschen Reihen.

Poincaré, H., Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Auf Einladung der Wolfskehl-Kommission d. K. Ges. d. Wiss. gehalten zu Göttingen vom 22.—28. April 1909. (Mathem. Vorlesungen a. d. Univ. Göttingen: IV.) — 60 pp. 8. M. 1,80 (geh.), M. 2,40 (geb.).

Über die Fredholmschen Gleichungen. Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf die Flutbewegung des Meeres. Anwendung der Integralgleichungen auf Hertzsche Wellen. Üb. die Reduktion der Abelschen Integrale und die Theorie der Fuchsschen Funktionen. Üb. transfinite Zahlen. La mécanique nouvelle.

Schlesinger, L., Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865. (Sonderabdruck aus dem 18. Bande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.) — IV+133 p. 8.

Existenzbeweise. Allgemeine Theorie. Analogien mit algebraischen Gleichungen. Analogien mit algebr. Funktionen. Die Umkehrprobleme. Gruppentheoretische Probleme. Bibliographie der Theorie der linearen Differentialgleichungen (1865 bis September 1907).

Sellenthin, B., Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Auf Veranlassung der kaiserl. Inspektion des Bildungswesens der Marine bearb. 2:e umgearb. Aufl. — X+452 pp. 8. M. 8,40 (geb.).

Arithmetik. Geometrie. Ebene Trigonometrie. Stereometrie. Sphärische Trigonometrie.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. 3:e Aufl., neu bearb. von Georg Scheffers. Bd 3: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. — XII+657 p. 8.

Tesar, L., Die Mechanik. Eine Einführung mit einem metaphysischen Nachwort. — XIV+220 p. 8. M. 3,20 (geb.).

Die Bewegung eines Punktes; die einfache Bewegung. Der Körper in seiner zusammengesetzten Bewegung. Die schwingende Bewegung. Die Relativbewegung. Die Maschinen.

Thiele, T. N., Interpolationsrechnung. — XII+175 p. 4.

Symbolische Interpolationsrechnung. Hülfsmethoden. Interpolation nach mehreren Argumenten. Nachtrag betreffend Berechnung des Wertes unendlicher Reihen.

Vuibert et Nony.
Paris 1904.

Mosnat, E., Problèmes de géométrie analytique. T. 1 (3e éd.), 2—3 (2e éd.). — 521, 479, 429 pp. 8. Fr. 20—.

T. 2: Géométrie à deux dimensions.
T. 3: Géométrie à trois dimensions.

Nicola Zanichelli.
Bologna 1909.

Burali-Forti, C., & Marcolongo, R., Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica, e alla fisica matematica — V+174 pp. 8. L. 5—.

Operazioni e funzioni vettoriali. Applicazioni del calcolo vettoriale alla geometria, alla meccanica e alla fisica matematica.

Righi, A., La materia radiante e i raggi magnetici. Con 46 figure nel testo e 22 riproduzioni di fotografie fuori testo. (Attualità scientifiche. N. 12.) — VI+308 p. 8. L. 8—.

Raggi di elettroni negativi. Raggi di ioni positivi. Possibile esistenza d'altre specie di materia radiante. — Le scariche nel campo magnetico. Disposizioni sperimentali. Cariche trasportate dalla materia radianti in un campo magnetico. Raggi magnetici in campo non uniforme. Produzione ed effetti dei raggi magnetici. Riassunto e conclusioni.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE CERTAINES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

PAR

E. STRIDSBERG

à STOCKHOLM.

CHAPITRE I.

Introduction.

L'étude suivante sur les propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes a pour origine et pour base essentielle d'une part les célèbres recherches concernant la transcendance des nombres e et π qui ont été faites par HERMITE, LINDEMANN, WEIERSTRASS et autres ainsi que les méthodes suivies par ces savants, d'autre part les recherches très intéressantes sur les propriétés arithmétiques des intégrales de certaines équations différentielles linéaires qu'on doit à MM. HURWITZ et BENDIXSON et où l'on retrouve sous une forme nouvelle certaines conséquences jusqu'ici peu observées de la preuve de l'irrationalité des nombres e et π donnée par LAMBERT et LEGENDRE.

Dans un mémoire célèbre, HERMITE a démontré la proposition suivante:[1]

Désignons par $E(x)$ la fonction exponentielle. Soient $x_0 x_1 \ldots x_n$ des nombres rationnels inégaux d'ailleurs arbitraires, et soient $C_0 C_1 \ldots C_n$ des nombres rationnels quelconques, avec $C_0 \neq 0$. Il ne pourra jamais exister une relation de la forme:

$$(1) \qquad \sum_k^n C_k E(x_k) = 0.$$

[1] HERMITE: Sur la fonction exponentielle. Compt. rend. t. 77. 1873.

Cette proposition est, comme je montrerai dans ce travail, applicable aussi à certaines fonctions d'un type plus général que la fonction exponentielle.

Or, pour cette dernière fonction elle offre, comme on le sait, un intérêt tout à fait particulier.

En effet, comme, d'après le théorème d'addition pour la fonction exponentielle, on aura

$$E(x_k) = e^{x_k},$$

il s'ensuit que e ne peut être la racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels, c'est-à-dire que e doit être, selon la terminologie de M. Kronecker, un nombre transcendant.

En partant des recherches précitées, M. Lindemann a le premier établi que π est aussi un nombre transcendant.

Je me permettrai dans ce qui suit de désigner par *le théorème de Lindemann* la proposition suivante:

Soient $\xi_1 \ldots \xi_m$ les racines d'une équation algébrique. Si $x_0 x_1 \ldots x_n$ désignent des nombres rationnels ou des expressions linéaires dans $\xi_1 \ldots \xi_m$ à coefficients rationnels, avec $x_i \neq x_k$ pour $i \neq k$, si $C_0 C_1 \ldots C_n$ sont des nombres rationnels, n'étant pas tous égaux à zéro, et si l'expression

$$\sum_0^n {}_k C_k E(x_k)$$

est symétrique dans $\xi_1 \ldots \xi_m$, il ne peut exister une relation de la forme

$$\sum_0^n {}_k C_k E(x_k) = 0. \tag{1}$$

Weierstrass a donné une transformation extrêmement intéressante des démonstrations fournies par Hermite et Lindemann et développé les recherches de ce dernier.[1]

En s'appuyant sur le théorème d'addition, Weierstrass finit par démontrer la proposition générale suivante, énoncée sans démonstration par M. Lindemann:

Théorème. *Si l'on a une relation de la forme*

$$\sum_0^n {}_k C_k E(x_k) = 0 \qquad (x_0 \neq x_i, \text{ pour } i \neq 0, \text{ et } C_0 \neq 0), \tag{1}$$

les nombres $C_0 C_1 \ldots C_n$, $x_0 x_1 \ldots x_n$ ne peuvent être tous algébriques.

[1] Weierstrass: Zu Lindemann's Abhandlung Ueber die Ludolph'sche Zahl. Sitz. ber. der Ak. d. Wissensch. zu Berlin, 1885, p. 1067—1085. (Voir aussi: Mathematische Werke von K. Weierstrass, Band 2, p. 341—362).

Du moment que, par exemple, $e^{\pi i}$ est un nombre algébrique, π ne peut être un nombre algébrique.

Parmi les autres transformations de cette preuve faites après WEIERSTRASS, je ne rappellerai que celle de HILBERT-HURWITZ-GORDAN[1] qui, surtout dans la forme que GORDAN y a donnée, a été d'une importance capitale pour mes études. Ces études nécessitant chez le lecteur la connaissance de la preuve de GORDAN, je crois devoir en donner ici un exposé sommaire.

GORDAN introduit un caractère h avec la signification symbolique suivante:

h^r désignera toujours $\underline{|r}$, r étant un entier quelconque ≥ 0;

$h^\mu . h^\nu$ ne signifiera pas $\underline{|\mu} . \underline{|\nu}$, mais $h^{\mu+\nu}$, c.-à.-d. $\underline{|\mu+\nu}$, et, par suite, $\dfrac{h^\mu}{h^\nu}$ ne signifiera jamais $h^{\mu-\nu}$ mais le quotient de $\underline{|\mu}$ par $\underline{|\nu}$;

$(x+h)^r$ sera défini par la formule du binôme, à savoir

$$\frac{(x+h)^r}{\underline{|r}} = \sum_0^r{}_\mu \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}} \frac{h^{r-\mu}}{\underline{|r-\mu}} = \sum_0^r{}_\mu \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}}.$$

Par conséquent, $f(x)$ désignant une fonction rationnelle entière quelconque, soit de dégré m, $f(x+h)$ sera défini par la série de TAYLOR, savoir

$$f(x+h) = \sum_0^m{}_\mu \frac{h^\mu}{\underline{|\mu}} f^\mu(x) = \sum_1^m{}_\mu f^\mu(x).$$

Cela posé, GORDAN a, de la manière suivante, démontré directement, en partant de la série exponentielle, le théorème d'HERMITE regardant la transcendance du nombre e.

Si l'on arrête ladite série à un terme arbitraire, soit au terme $(r+1)^{\text{me}}$, on obtiendra

$$E(x) = \sum_0^r{}_\mu \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}} + \frac{x^r}{\underline{|r}} \chi_r(x) = \frac{(x+h)^r}{\underline{|r}} + \frac{x^r}{\underline{|r}} \chi_r(x),$$

où l'on aura $|\chi_r(x)| < E(|x|)$ et par suite

$$(2') \qquad h^r E(x) = (x+h)^r + \lambda_r(x) x^r E(|x|) \qquad |\lambda_r(x)| < 1.$$

Soit

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^{p-1}}{\underline{|p-1}} \prod_0^n{}_i (x-x_i)^p = \sum_0^m{}_\nu a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}},$$

[1] HILBERT: Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π. — HURWITZ: Beweis der Transcendenz der Zahl e. — GORDAN: Transcendenz von e und π. — Toutes ces trois notes se retrouvent dans les Math. Annalen, tome 43, 1893.

et mettons

$$\varphi(x) = \sum_0^m{}_\nu\, a_\nu \lambda_\nu(x) \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}},$$

nous aurons

$$f(h)E(x) = \frac{(x - x_0 + h)^{p-1}}{\underline{|p-1}} \prod_1^n{}_i\, (x - x_i + h)^p + \varphi(x) E(|x|),$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad f(h) \sum_0^n{}_k\, C_k E(x_k) = A + B + C,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$A = C_0 \frac{h^{p-1}}{\underline{|p-1}} \prod_1^n{}_i\, (x_0 - x_i + h)^p$$

$$B = \sum_1^n{}_k\, C_k \frac{(x_k - x_0 + h)^{p-1} h^p}{\underline{|p-1}} \prod_1^n{}'_i\, (x_k - x_i + h)^p$$

$$C = \sum_0^n{}_k\, C_k \varphi(x_k) E(|x_k|).$$

On aura évidemment

$$|\varphi(x)| < \sum_0^m{}_\nu \left| a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}} \right|.$$

Le dernier terme (C) du membre droit de l'équation (2) est donc, pour des valeurs de p assez grandes, d'une valeur numérique inférieure à 1. Soient maintenant $x_0 x_1 \dots x_n$ $C_0 C_1 \dots C_n$ des entiers quelconques; les deux autres termes (A et B) seront de même des entiers, dont B sera divisible par p.

En admettant que le membre gauche soit égal à zéro, C doit de même se réduire à un nombre entier, et l'on aura, pour des valeurs de p assez grandes, $C = 0$, d'où

$$A + B = 0,$$

et, par suite, A sera de même divisible par p.

Or, l'on aura

$$A \equiv C_0 \prod_1^n{}_i\, (x_0 - x_i)^p \qquad (\text{mod. } p).$$

Supposons le produit

$$K = \left| C_0 \prod_1^n {}_i (x_0 - x_i) \right| \neq 0.$$

Si donc p est un nombre premier assez grand et $> K$, A ne pourra pas être divisible par p, et, par suite, le membre gauche de l'équation (2) ne peut s'annuler. *C. Q. F. D.*

Par la voie indiquée par WEIERSTRASS, cette preuve se laisse généraliser jusqu'à embrasser la proposition de LINDEMANN. Les idées directrices d'une pareille preuve étendue se retrouvent — sous une forme adaptée aux besoins de la démonstration — dans les recherches du chapitre II § 3 de ce mémoire.

LAMBERT est, comme on le sait, le premier qui ait d'une manière rigoureuse établi *l'irrationalité* des nombres e et π, et sa démonstration a été plus tard développée par LEGENDRE.[1]

LEGENDRE étudie la fonction suivante

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\underline{|\nu}\, f_\nu(z)},$$

où l'on aura

$$f_\nu(z) = \prod_0^{\nu-1} {}_\lambda (z + \lambda) \qquad (f_0(z) = 1).$$

On obtient par des calculs élémentaires cette belle formule de développement en fraction continue:

$$(3') \qquad \frac{a}{z} \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = \begin{bmatrix} a \\ k+z \end{bmatrix}.^{[2]}$$

Or, d'après un théorème de LEGENDRE devenu classique dans la théorie des fractions continues, il ne peut arriver, quelles que soient les valeurs données ra-

[1] LAMBERT: Vorläufige Kentnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen. Beyträge z. Gebrauche der Mathematik u. deren Anwendung. II, p. 140—169. Berlin 1770. (Le mémoire a été écrit en 1766.) — LEGENDRE: Eléments de géométrie. Note 4. 1re édition, Paris 1794—35me éd., ib. 1900. — Les deux mémoires ont été littéralement reproduits dans l'oeuvre de M. F. RUDIO: Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Leipzig, Teubner. 1892.

[2] J'emploie ici et dans ce qui suit la notation connue $\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}$ pour représenter une fraction continue de la forme:

$$\cfrac{\alpha_0}{\beta_0 + \cfrac{\alpha_1}{\beta_1 + \cdots}}$$

tionnelles de a et de z, que la fraction continue ci-dessus obtenue se réduise à un nombre rationnel.[1]

Cette proposition remarquable établie par LEGENDRE peut évidemment être exprimée encore sous la forme suivante:

Désignons par c une constante arbitraire, et introduisons

$$b = cz, \quad x = ca.$$

Si l'on considère $\varphi(z)$ comme fonction de x — avec les paramètres b et c — soit

$$\varphi(z) = V(x\,/\,c,\ b),$$

on aura

$$\varphi(z+1) = b\,V'(x\,/\,c,\ b),$$

d'où

$$cx\frac{V'(x)}{V(x)} = c\left[\frac{a}{k+z}\right] = \left[\frac{cx}{kc+b}\right], \tag{3}$$

et l'on pourra formuler de la manière suivante *le théorème de Legendre:*

b et c étant des nombres rationnels quelconques, désignons par k_b^ν le produit

$$k_b^\nu = \prod_0^{\nu-1}{}_\lambda\,(b + c\lambda) \qquad (k_b^0 = 1)$$

et posons

$$V(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^\nu}{k_b^\nu \lfloor\underline{\nu}};$$

la dérivée logarithmique de $V(x)$ ne peut jamais avoir une valeur rationnelle pour des valeurs rationnelles de l'argument différentes de zéro.

En remplaçant b par 2 et c par 4, on aura

$$V(x^2) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad V(-x^2) = \cos x,$$

d'où l'on tire, comme cas spécial, *le théorème de Lambert:*

e^x et x ainsi que $tg\,x$ et x ne peuvent être simultanément rationnels, sauf le cas où $x = 0$. Par suite, $tg\frac{\pi}{4}$ étant rationnel, π doit être irrationnel.

Dans le cas général, $V(x)$ représentera évidemment une fonction entière, intégrale particulière d'une équation différentielle de BESSEL, à savoir de l'équation

[1] Une autre propriété intéressante de cette fraction continue me paraît digne d'une mention en passant: c'est qu'elle représentera une fonction de z qui ne satisfera à aucune équation différentielle algébrique.

$$cxV_2 + bV_1 - V = 0. \qquad \left(V_\mu = \frac{d^\mu V}{dx^\mu}\right). \tag{4}$$

Sous cette dernière forme le théorème de LEGENDRE a été trouvé pour la première fois par M. HURWITZ et — indépendamment — aussi par M. BENDIXSON.[1]

Les mémoires de M. HURWITZ consacrés à ce sujet ont été publiés dans les Math. Annalen sous le titre »Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenter Functionen I (Band 22, 1882) und II (Band 32, 1888).»

Le dernier de ces mémoires a été provoqué par un article de M. RATNER,[2] où l'auteur cherche à employer les méthodes de M. HURWITZ pour étudier même des équations différentielles linéaires plus générales que celle que nous avons indiquée ci-dessus par (4).

A ce propos, M. HURWITZ fournit une nouvelle preuve du théorème de LEGENDRE, preuve qui, comme il le fait comprendre lui-même, n'est qu'une transcription de la preuve de LEGENDRE, mais qui offre l'avantage d'être applicable dans une certaine mésure à des fonctions d'un type plus général.

Soit r une constante arbitraire, nous aurons

$$V(x/c,\, b) = V(rx/rc,\, rb),$$

et, par suite, nous pouvons nous borner au cas où x, b et c désignent des nombres entiers.

Désignons par $\dfrac{\psi_\mu}{\varphi_\mu}$ la réduite $\mu^{\text{ième}}$ de la fraction continue (3), nous aurons évidemment

$$(-1)^\mu c^\mu x^\mu V_\mu = V\psi_\mu - cxV_1\varphi_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2 \ldots \text{ad inf.}).$$

ψ_μ et φ_μ doivent être des polynômes rationnels de x, b et c à coefficients entiers.

Cela posé, si $V_1 : V$ se réduit à un nombre rationnel, soit

$$V = k_0\varrho \text{ et } V_1 = k_1\varrho,$$

où k_0 et k_1 désignent des nombres entiers ou nuls, on obtiendra

$$c^\mu x^\mu V_\mu = k_\mu\varrho, \text{ avec } k_\mu \text{ entier.} \tag{5}$$

A partir d'une certaine valeur de μ, soit pour $\mu \geq \lambda$, le membre gauche de (5) doit être inférieur en valeur numérique à une quantité donnée quelconque ϱ,

---

[1] BENDIXSON: Sur les équations différentielles linéaires à solutions périodiques. Kungl. Vetensk. Akad. Öfversikt. Stockholm 1896. — On trouvera dans ce mémoire le théorème de LEGENDRE appliqué, d'une manière fort intéressante, à l'étude des solutions périodiques de certaines équations différentielles linéaires.

[2] RATNER: Ueber eine Eigenschaft gewisser linearer irreductibler Differentialgleichungen. Math. Ann. Band 32, 1888.

c'est-à-dire, en d'autres termes, que le nombre entier $|k_\mu|$ doit être < 1, et, par conséquent, on aura

$$k_\mu = 0 \text{ et de même } V_\mu = 0, \text{ pour } \mu \geq \lambda.$$

On aura donc pour V une fonction rationnelle de x, ce qui est impossible. La proposition énoncée se trouve donc démontrée.

M. Hurwitz cherche ensuite — et réussit jusqu'à un certain point — à étendre cette démonstration à des fonctions d'un type plus général, entre autres à certaines séries hypergéométriques généralisées.[1]

C'est surtout les idées exprimées dans ce dernier mémoire de M. Hurwitz qui m'ont fait entreprendre les recherches publiées dans les chapitres suivants de ce travail.

Dans le chapitre II je continuerai les recherches commencées par Legendre et Hurwitz sur certaines fonctions de Bessel; le chapitre III sera consacré à des fonctions un peu plus générales.

CHAPITRE II.

Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions de Bessel.

§ 1. Nous étudierons d'abord l'équation différentielle qui fait l'objet des recherches de M. Hurwitz, à savoir

$$(1) \qquad cx\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Nous ferons pour le moment à l'égard des coefficients de cette équation seulement cette supposition que $c \neq 0$. (Si $c = 0$, l'équation (1) se transforme en effet, comme on le voit, dans l'équation différentielle de la fonction exponentielle).

Désignons par $k_b^\nu(c)$ ou, plus brièvement encore, par k_b^ν le produit

$$k_b^\nu = b(b + c) \dots (b + \overline{\nu - 1}\, c),$$

l'indice ν étant ≥ 1, et soit pour $\nu = 0$: $k_b^0 = 1$.

[1] Hurwitz loc. cit. — Voir aussi p. 272 et suivantes de ce travail.

Les intégrales particulières de l'équation (1) sont

$$(2)\qquad \begin{cases} V(x/c,b) = \sum_0^\infty{}_\nu \dfrac{x^\nu}{k_b^\nu \lfloor \nu}, \text{ et} \\ \\ V(x/c,b) = x^{1-\frac{b}{c}}\, V(x/c, -b+2c). \end{cases}$$

On aura évidemment tous les coefficients $k_b^\nu \neq 0$, sauf le cas où b est un multiple de $-c$, soit pour $b = -\lambda c$ (λ désignant un nombre entier ≥ 0).

Dans ce cas, on trouve en effet

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour } \nu \leq \lambda:\ k_b^\nu = (-c)^\nu \dfrac{\lfloor \lambda}{\lfloor \lambda - \nu} \\ \\ \text{et pour } \nu > \lambda:\ k_b^\nu = 0. \end{array}\right|$$

Par conséquent, $V(x/c,b)$ a évidemment toujours un sens déterminé pour $b \neq -\lambda c$, et représente une fonction entière. Si, d'autre part, $b = -\lambda c$, l'autre intégrale $V(x/c,b)$ représentera à son tour une fonction entière.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de V sera évidemment

$$V_n(x/c,b) = \frac{1}{k_b^n} V(x/c, b+nc).$$

Nous pouvons donc restreindre l'étude arithmétique des intégrales de l'équation différentielle (1) et de toutes leurs dérivées à l'examen des fonctions $V(x/c,b) \qquad (b \neq \lambda c)$.

Avant d'aborder cette étude, je crois utile d'établir concernant les coefficients k_b^ν quelques lemmes élémentaires, dont je ferai, dans ce qui suit, un usage fréquent.

Je donnerai d'abord au caractère k_b une signification symbolique analogue à celle qu'a donnée M. Gordan au caractère h (voir ci-dessus p. 235), de sorte que $k_b^\mu . k_b^\nu$ désignera toujours $k_b^{\mu+\nu}$, c.-à.-d. le produit

$$b(b+c) \ldots . (b + \overline{\mu + \nu - 1}\, c),$$

et non pas le produit de k_b^μ et de k_b^ν,

$(x + k_b)^r$ sera défini par la formule du binôme, à savoir

$$\frac{(x+k_b)^r}{\lfloor r} = \sum_0^r{}_\nu \frac{k_b^\nu\, x^{r-\nu}}{\lfloor \nu \lfloor r-\nu}, \text{ etc.}$$

Cela posé, j'établirai les propositions suivantes:

Lemme I: a, b et c désignant des quantités arbitraires et r étant un entier positif quelconque, on aura toujours

$$(k_a + k_b)^r = k_{a+b}^r$$

(k_a^r *désignant* $k_a^r(c)$, $k_b^r = k_b^r(c)$, $k_{a+b}^r = k_{a+b}^r(c)$.)

Pour $r = 0$ et pour $r = 1$, la proposition est évidente.

Supposons dès lors, que r soit un entier quelconque > 1.

On aura

$$(k_b + k_a)^r = \underline{|r-1}\sum_{0}^{r-1}{}_{\nu}\left(\frac{k_b^{\nu+1}}{\underline{|\nu}}\,\frac{k_a^{r-1-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}} + \frac{k_b^{\nu}}{\underline{|\nu}}\,\frac{k_a^{r-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}}\right) =$$

$$= \underline{|r-1}\sum_{0}^{r-1}{}_{\nu}\,(a + b + c\overline{r-1})\,\frac{k_b^{\nu}}{\underline{|\nu}}\,\frac{k_a^{r-1-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}} =$$

$$= (a + b + c\overline{r-1})\,(k_b + k_a)^{r-1},$$

d'où

$$\frac{(k_b + k_a)^r}{k_{b+a}^r} = \frac{(k_b + k_a)^{r-1}}{k_{b+a}^{r-1}} = \cdots = \frac{k_b + k_a}{k_{b+a}} = 1. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Ce lemme élémentaire, qui a été trouvé probablement pour la première fois par Vandermonde, subsistera même en cas d'évanouissement de l'un ou de l'autre des termes de la série donnée pour $(k_b + k_a)^r$ ou de tous ces termes.

On en déduit comme corollaire cette autre proposition:

Lemme II: Soit

$$f(x) = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\, a_\nu x^\nu$$

une fonction rationnelle entière quelconque, et mettons

$$f(k_b) = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\, a_\nu k_b^\nu,$$

nous aurons

$$f(k_{a+b}) = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\, \frac{k_a^\nu}{\underline{|\nu}}\, f^\nu(k_b) = h(k_b),$$

où l'on aura mis

$$h(x) = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\, \frac{k_a^\nu}{\underline{|\nu}}\, f^\nu(x).$$

On trouvera de même pour les dérivées d'un ordre quelconque

$$f^r(k_{a+b}) = \sum_0^m {}_\nu \frac{k_a^\nu}{\underline{|\nu}} f^{\nu+r}(k_b) = h^r(k_b).$$

Lemme III. Si l'on donne à b et à c des valeurs entières, r et ν désignant des entiers positifs quelconques, soit, pour préciser, $0 \leq \nu \leq r$, on aura

$$\frac{c^\nu k_b^r}{\underline{|\nu} \, k_b^{r-\nu}} = \textit{nombre entier.}$$

En effet, comme

$$k_b^r(-c) = (-1)^r k_{-b}^r(c),$$

il n'y a lieu de s'occuper que des valeurs positives de c.

La formule

$$c^{\nu-1} \frac{k_b^\nu}{\underline{|\nu}} = \text{nombre entier}$$

est évidente pour $\nu = 1$ et pour $\nu = 2$, et pourra encore être démontrée pour $\nu > 3$ par déduction de $r-1$ à r.

Supposons, en effet, que ladite formule soit vraie pour $1 \leq \nu \leq r-1$, et désignons par α un entier quelconque ≥ 0.

On aura

$$c^{r-2}(k^r_{b\overline{a+1}} - k^r_{ba}) = c^{r-2}k^r_b + \underline{|r} \sum_1^{r-1} {}_\nu \, c^{\nu-1} \frac{k^\nu_{ba}}{\underline{|\nu}} \cdot c^{r-1-\nu} \frac{k_b^{r-\nu}}{\underline{|r-\nu}},$$

d'où

$$c^{r-2}(k^r_{b\overline{a+1}} - k^r_{ba}) \equiv c^{r-2}k^r_b \qquad (\text{mod. } \underline{|r})$$

et, par suite,

$$c^{r-2}k^r_{bc} = c^{r-2} \sum_0^{c-1} {}_a (k^r_{b\overline{a+1}} - k^r_{ba}) \equiv c^{r-1}k^r_b \qquad (\text{mod. } \underline{|r}).$$

Or, étant

$$c^{r-2}k^r_{bc} = c^{2r-2}k^r_b(1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \underline{|r}),$$

on aura de même

$$c^{r-1}k^r_b \equiv 0 \ (\text{mod. } \underline{|r}), \text{ pour } r \geq 1.$$

Cela établi, on aura encore

$$\frac{c^{\nu-1}k^r_b}{\underline{|\nu}\, k_b^{r-\nu}} = \frac{c^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} k^\nu_{b+cr-\nu} = \text{nombre entier, pour } 1 < \nu < r.$$

A fortiori, on trouvera

$$\frac{c^\nu k_b^r}{\lfloor\nu\, k_b^{r-\nu}} = \text{nombre entier},$$

et cette formule restera vraie encore pour $\nu = 0$. *C. Q. F. D.*

La formule

$$\frac{c^{r-1} k_b^r}{\lfloor r} = \text{nombre entier, pour } r > 1,$$

se déduit aisément comme un cas spécial du célèbre théorème d'EISENSTEIN concernant les coefficients du développement en série de TAYLOR d'une fonction algébrique.

On trouve en effet

$$(1 - c^2 x)^{-b:c} = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c^\nu k_b^\nu}{\lfloor\nu} x^\nu.^1$$

J'ai préféré toutefois conserver la démonstration très-élémentaire donnée ci-dessus sans supposer connues les recherches d'EISENSTEIN.

On aura, comme conséquence immédiate du lemme III, la proposition suivante:

Lemme IV. Soient $\alpha^0\alpha^1\ldots\alpha^\mu, \beta^0\beta^1\ldots\beta^\mu$ ainsi que a, b et c des nombres entiers quelconques. J'introduis, pour abréger, la notation suivante:

$$\varphi = \frac{k_a^{r+\mu} k_b^{s+\mu}}{k_a^r k_b^s}\left(\frac{\alpha}{k_a} + \frac{\beta}{k_b}\right)^\mu = \lfloor\mu\, k_a^{r+\mu} k_b^{s+\mu} \sum_0^\mu{}_\nu \frac{\alpha^\nu}{k_a^{r+\nu}\lfloor\nu} \cdot \frac{\beta^{\mu-\nu}}{k_b^{s+\mu-\nu}\lfloor\mu-\nu},$$

μ, r et s désignant des entiers positifs; on a toujours

$$\frac{c^\mu}{\lfloor\mu}\varphi = \textit{nombre entier.}$$

En effet, chaque terme de la série

$$\sum_0^\mu{}_\nu\, \alpha^\nu\beta^{\mu-\nu} \cdot \frac{c^{\mu-\nu} k_a^{r+\mu}}{\lfloor\mu-\nu\, k_a^{r+\nu}} \cdot \frac{c^\nu k_b^{s+\mu}}{\lfloor\nu\, k_b^{s+\mu-\nu}}$$

est, comme on le voit, un produit de nombres entiers, et, par suite, la somme elle-même devra se réduire à un nombre entier. *C. Q. F. D.*

J'ai préféré grouper ici ces lemmes préliminaires afin d'éviter, dans ce qui suit, des digressions encombrantes.

---

[1] Conf. HERMITE: Cours professé pendant le 2e semestre 1881—82. Paris. Hermann. 1883.

1·

§ 2. Je vais chercher maintenant à étudier de près la fonction $V(x/c,b)$ pour des valeurs *rationnelles* des paramètres b et c et pour des valeurs algébriques — notamment *rationnelles* — de l'argument.

On peut d'abord démontrer que non seulement le théorème de Lambert, mais encore la proposition plus générale d'Hermite (et même celle de M. Lindemann) concernant la fonction exponentielle — sous la forme que j'ai donnée dans le chapitre précédent à ces propositions — correspondent à des propositions analogues pour la fonction V et pour ses dérivées d'ordre quelconque.

Nous supposons, d'après ce qui précède, que b et c soient des nombres rationnels quelconques ($c \neq 0$), et que l'argument x soit un nombre algébrique quelconque.

Désignons par $F(x/c,b)$ l'intégrale générale de l'équation différentielle (1), et soit r une constante arbitraire, nous aurons, comme le fait observer M. Hurwitz,

$$F(rx/rb,rc) = F(x/c,b).$$

On peut donc, sans diminuer la généralité des recherches, supposer que c et b soient des nombres *entiers*, avec $c > 0$, et que x soit un nombre *entier* algébrique, c.-à.-d. racine d'une équation de la forme

$$x^{n+1} + \sum_{0}^{n}{}_{\nu} a_\nu x^\nu = 0\,.$$

les $a_0 a_1 \ldots a_n$ étant tous des nombres entiers ou nuls.

Tout particulièrement, il est donc inutile d'examiner F pour d'autres valeurs *rationnelles* de l'argument que des nombres *entiers*.

Pour l'étude arithmétique plus approfondie de la série $V(x/c,b)$, j'ai procédé de la manière suivante:

Soit r un entier positif quelconque, et désignons par $E\left(\frac{r}{2}\right)$ le plus grand entier $\frac{r}{2}$.

J'introduis les définitions et les notations suivantes:

Soit

$$u^0(x/c,b) = 1,$$

et, pour l'indice $r > 1$,

(3)
$$\frac{u^r(x/c,b)}{|\underline{r}} = \sum_{0}^{E\left(\frac{r}{2}\right)}{}_{\lambda} \frac{k_a^{r-\lambda}}{k_b^{\lambda}} \frac{|\underline{r-\lambda}}{|\underline{r-2\lambda}\,|\underline{\lambda}} c^{r-\lambda}$$

Je fais observer que, b et c étant supposés des nombres entiers, toutes les fonctions

$$\frac{u^r(x)}{\underline{|r}}$$

représenteront des fonctions rationnelles entières à coefficients entiers.

On trouve entre ces fonctions u^r les relations suivantes:

Comme

$$(b + c\,\overline{r - \lambda - 1})(r - \lambda) = (b + c\,\overline{r - 1})(r - 2\lambda) + \lambda(b + c\lambda - 1),$$

on aura

$$\frac{u^r(x/c, b)}{\underline{|r}} = (b + \overline{r - 1}\,c) \sum_{0}^{E\left(\frac{r-1}{2}\right)}{}_{\lambda} \frac{k_b^{r-1-\lambda}}{k_b^{\lambda}} \cdot \frac{\underline{|r - 1 - \lambda}}{\underline{|r - 1 - 2\lambda}} \cdot \frac{c^\lambda x^\lambda}{\underline{|\lambda}} +$$

$$+ cx \sum_{1}^{E\left(\frac{r}{2}\right)}{}_{\lambda} \frac{k_b^{r-1-\lambda}}{k_b^{\lambda-1}} \cdot \frac{\underline{|r - 1 - \lambda}}{\underline{|r - 2\lambda}} \cdot \frac{(cx)^{\lambda-1}}{\underline{|\lambda - 1}} =$$

$$(b + \overline{r - 1}\,c) \frac{u^{r-1}(x/c, b)}{\underline{|r - 1}} + cx \sum_{0}^{E\left(\frac{r-2}{2}\right)}{}_{\lambda} \frac{k_b^{r-2-\lambda}}{k_b^{\lambda}} \cdot \frac{\underline{|r - 2 - \lambda}}{\underline{|r - 2 - 2\lambda}} \frac{(cx)^\lambda}{\underline{|\lambda}},$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \frac{u^r(x/c, b)}{\underline{|r}} = (b + \overline{r - 1}\,c) \frac{u^{r-1}(x/c, b)}{\underline{|r - 1}} + cx \frac{u^{r-2}(x/c, b)}{\underline{|r - 2}}.$$

Introduisons maintenant un caractère u avec la signification symbolique suivante:[1]

[1] Les systèmes symboliques qu'on rencontre dans ce travail ne sont ni ici ni ailleurs indispensables à la démonstration. Au contraire, ce serait une chose simple, bien qu'amenant sans doute par ci par là certains embarras de nature formelle, que de transcrire la preuve sans se servir de ces symboles.

Si je les ai conservés, c'est qu'ils me paraissent faire ressortir d'une façon plus claire les propriétés arithmétiques des fonctions et aussi qu'ils m'ont fourni le moyen technique à l'aide duquel j'ai réussi à démontrer mes propositions.

Il m'a paru utile de faire cette observation, car M. Vahlen a trouvé nécessaire d'introduire dans les Math. Annalen une nouvelle preuve élémentaire arithmético-algébrique de la transcendance de e, preuve qui, à l'instar de celles de Hurwitz et de Gordan, se base sur la preuve de Hilbert, mais qui posséderait, par rapport à celle de Gordan, l'avantage de »ne pas se servir de désignations symboliques

Il ne serait guère difficile non plus de montrer que ce n'est nullement à une faiblesse essentielle de la preuve de Gordan que M. Vahlen s'est attaqué dans le passage precité.

Laissant de côté l'exécution formelle — chose relativement peu importante — le mérite principal de la preuve de Gordan me semble être de ramener d'une manière plus simple et plus

Nous désignerons par

$$\frac{[x + u(x/c, b)]^r}{\underline{|r}} \text{ ou, plus brièvement, par } \frac{(x + u)^r}{\underline{|r}}$$

la somme

$$\sum_0^r{}_\lambda \frac{x^\lambda}{\underline{|\lambda}} \frac{u^{r-\lambda}(x/c, b)}{\underline{|r - \lambda}},$$

r étant un entier positif quelconque.

Donc, si $f(x)$ est une fonction entière rationnelle quelconque, soit de degré n,

$$f(x + u) \text{ désignera } \sum_0^n{}_r \frac{u^r(x)}{\underline{|r}} f^r(x).$$

On trouve d'après l'équation (4)

$$\frac{(x+u)^r}{\underline{|r}} - \frac{x^r}{\underline{|r}} = \sum_0^{r-1}{}_\lambda (b + c\,\overline{r - 1 - \lambda}) \frac{x^\lambda}{\underline{|\lambda}} \frac{u^{r-1-\lambda}}{\underline{|r - 1 - \lambda}} + \sum_0^{r-2}{}_\lambda c(\lambda + 1) \frac{x^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda + 1}} \frac{u^{r-1-(\lambda+1)}}{\underline{|r - 1 - (\lambda + 1)}},$$

d'où

palpable que les preuves précédentes les recherches sur les propriétés arithmétiques de la fonction e^x à l'étude des coefficients de la série exponentielle.

C'est à cause de cette qualité de la preuve en question qu'il m'a semblé naturel de la prendre pour base d'un essai de dériver des coefficients des séries de Taylor représentant les fonctions qui font l'objet de mes recherches, et qui ont avec la fonction exponentielle une certaine affinité, des propriétés arithmétiques apparentées à celles qu'on a constatées chez la dite fonction.

La preuve de Gordan, telle qu'elle a été exposée p. 235 et s., ramène l'étude de la fonction exponentielle d'une part à la propriété de $\underline{|r}$ qui à l'endroit cité a donné lieu à l'équation

$$(2') \qquad h^r E(x) = (x + h)^r + \lambda_r x^r E(|x|),$$

d'autre part au théorème d'addition

Il faut pourtant observer que déja l'équation (2') à elle seule aurait suffi pour une étude non seulement de relations linéaires mais aussi de relations rationnelles de degré supérieur de la fonction exponentielle.

En effet, on trouve d'après l'équation (2')

$$(h - x_1)^r E(x_1) = h^r + \lambda'_r x_1^r E(|x_1|),$$

d'où l'on aura

$$(h - x_1)^r E(x_1) . E(x) = (x + h)^r + \lambda_r x^r E(|x|) + \lambda'_r x_1^r E(|x_1|) E(x),$$

et, par suite,

$$(2'') \qquad h^r E(x_1) E(x) = (x + x_1 + h)^r + \mu_r (|x| + |x_1|)^r E(|x_1|) . E(|x|),$$

où l'on aura $|\mu_r| < 1$.

On est amené par là à chercher une généralisation des deux équations (2') et (2'')

$$\frac{(x+u)^r}{k_b^r\underline{|r}}-\frac{x^r}{k_b^r\underline{|r}}-\frac{b+c\,\overline{r-1}}{k_b^r}\sum_0^{r-1}{}_\lambda\,\frac{x^\lambda}{\underline{|\lambda}}\,\frac{u^{r-1-\lambda}}{\underline{|r-1-\lambda}}=\frac{(x+u)^{r-1}}{k_b^{r-1}\underline{|r-1}},$$

et, par suite,

$$\frac{(x+u)^r}{k_b^r\underline{|r}}=\sum_0^r{}_\nu\,\frac{x^\nu}{k_b^\nu\underline{|\nu}}. \tag{5}$$

Si l'on arrête la série $V(x/c, b)$ à un terme arbitraire, soit au terme $(r+1)^{\text{me}}$, on obtiendra

$$\begin{aligned} V(x/c,b) &= \sum_0^r{}_\nu\,\frac{x^\nu}{k_b^\nu\underline{|\nu}}+\frac{x^r}{k_b^r\underline{|r}}\,\chi_r(x) \\ &= \frac{(x+u)^r}{k_b^r\underline{|r}}+\frac{x^r}{k_b^r\underline{|r}}\,\chi_r(x), \end{aligned} \tag{6'}$$

où l'on doit avoir

$$\chi_r(x)=\frac{x}{(b+cr)(r+1)}+\frac{x^2}{(b+cr)(b+cr+1)(r+1)(r+2)};$$

Or, soit $\varkappa$ le premier nombre entier positif pour lequel

$$b+c\varkappa>0,$$

et introduisons

$$U(x)=|k_b^\varkappa|\sum_0^\infty{}_\nu\,\frac{x^\nu}{|k_b^\nu|\underline{|\nu}},$$

on aura dans tous les cas

$$|\chi_r(x)| < U(|x|).$$

Si, de plus, nous introduisons le caractère $h(c, b)$ avec une signification symbolique qui se rattache à celle de Gordan (voir p. 235), de sorte que h^r désigne $u^r(0/c, b)$, d'où

$$h^r=k_b^r\underline{|r},$$

l'équation (6') peut s'écrire, comme on le voit aisément,

$$h^r V(x)=(x+u)^r+\lambda_r x^r U(|x|), \tag{6}$$

où l'on aura

$$|\lambda_r(x)|<1.$$

Or, soit $f(x)$ un polynôme rationnel quelconque, mettons

$$f(x)=\sum_0^n{}_\nu\,a_\nu\,\frac{x^\nu}{\underline{|\nu}},$$

et soit

$$\varphi(x) = \sum_0^n {}_\nu a_\nu \lambda_\nu \frac{x^\nu}{\lfloor \nu}.$$

Il s'ensuit que

$$f(h)\,V(x) = f(x+u) + \varphi(x)\,U(|x|), \tag{7}$$

où l'on aura évidemment

$$|\varphi(x)| \leq \sum_0^n \left| a_\nu \frac{x^\nu}{\lfloor \nu} \right|.$$

Soient maintenant $x_0 x_1 \ldots x_n$ $(n+1)$ nombres rationnels quelconques inégaux, et soient de même $C_0 C_1 \ldots C_n$ des nombres rationnels quelconques $\neq 0$.

Cela posé, supposons qu'il existe une relation de la forme

$$W = \sum_0^n {}_k C_k V(x_k \,/\, c,\, b) = 0. \tag{8}$$

On pourra, comme nous l'avons déjà remarqué, sans diminuer la généralité de nos recherches, supposer que $x_0 x_1 \ldots x_n$ ainsi que $C_0 C_1 \ldots C_n$ soient tous des nombres *entiers*.

Si maintenant $n = 0$ et $x_0 = 0$, nous aurons

$$W = C_0 \neq 0.$$

Dans tout autre cas, nous pourrons, tous les x_i étant inégaux, supposer, pour plus de simplicité, que les x_i soient ordonnés de telle manière que

$$x_0 \neq 0.$$

Désignons par λ et p deux entiers positifs quelconques, soit

$$p > \lambda.$$

Pour préciser, je suppose que p soit un entier impair, et que λ doive être choisi dans l'intervalle

$$\frac{p-1}{2} < \lambda < p-1. \tag{i}$$

Je mets encore

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^\lambda}{\lfloor \lambda} \prod_1^n {}_i\,(x-x_i)^p,$$

d'où l'on tire

$$f(h)V(x) = \frac{(x - x_0 + u)^\lambda}{\lfloor \underline{\lambda}} \prod_1^n {}_i (x - x_i + u)^p + \varphi(x) U(|x|),$$

et j'aurai par conséquent

$$(10) \qquad 0 = f(h) \sum_0^n {}_k C_k V(x_k) = A + B + C,$$

où j'ai introduit, pour abréger,

$$A = C_0 \frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor \underline{\lambda}} \prod_1^n {}_i (x_0 - x_i + u(x_0))^p$$

$$B = \sum_1^n {}_k C_k \frac{[x_k - x_0 + u(x_k)]^\lambda}{\lfloor \underline{\lambda}} u^p \prod_1^n {}_i' (x_k - x_i + u)^p$$

$$C = \sum_0^n {}_k C_k \varphi(x_k) U(|x_k|).$$

Or, x étant un nombre entier, les fonctions

$$\frac{u^\nu(x)}{\lfloor \underline{\nu}}$$

seront, d'après ce qui précède, toujours des entiers, et il en résulte que A et B seront de même des nombres entiers.

Dans ce cas, C sera encore un nombre entier.

Or, l'on pourra toujours choisir p assez grand pour que

$$|C| \text{ soit inférieur à } 1,$$

quel que soit l'entier λ choisi dans l'intervalle (i).

Donc, nous aurons

$$C = 0,$$

d'où encore

$$A + B = 0.$$

Or, l'on trouve aisément

$$B \equiv 0 \pmod{p}$$

et, par conséquent, on aura de même

$$A \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si p est un nombre premier, on aura évidemment

$$A \equiv C_0 \frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor\lambda} \prod_1^n i\,(x_0 - x_i)^p \quad (\text{mod. } p).$$

Or, soit p un nombre premier assez grand et supérieur à la valeur numérique de

$$C_0 \prod_1^n i\,(x_0 - x_i),$$

on aura

$$\frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor\lambda} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \tag{11}$$

Nous prenons le nombre premier

$$p > |bcx_0|.$$

Désignons par $\nu - 1$ et ν deux nombres consécutifs dans l'intervalle (i), et substituons successivement dans l'équation (11)

$$\lambda = \nu \text{ et } \lambda = \nu - 1,$$

nous aurons

$$\frac{u^\nu(x_0)}{\lfloor\nu} \equiv 0 \text{ et } \frac{u^{\nu-1}(x_0)}{\lfloor\nu - 1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Par conséquent, d'après l'équation (4), nous obtiendrons

$$cx_0 \frac{u^{\nu-2}(x_0)}{\lfloor\nu - 2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

et, comme $|cx_0| < p$, il faut encore que

$$\frac{u^{\nu-2}(x_0)}{\lfloor\nu - 2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

De proche en proche, on trouvera de même que tous les

$$\frac{u^\lambda(x_0)}{\lfloor\lambda} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

pour

$$\lambda < \nu.$$

Donc l'on aura enfin

$$u^1(x_0) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

c.-à.-d. que b devra être divisible par p, ce qui est impossible, puisque nous avons supposé

$$0 < |b| < p. \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

Nous aurons donc la la proposition générale suivante:

Théorème. *Si l'on désigne par* $x_0 x_1 \ldots x_n$ $(n + 1)$ *nombres rationnels inégaux, d'ailleurs quelconques, si* c *et* b *désignent des nombres rationnels quelconques, et que* $C_0 C_1 \ldots C_n$ *soient de même des nombres rationnels quelconques, qui ne sont pas tous égaux à zéro, il ne pourra jamais exister une relation de la forme*

$$\sum_0^n{}_k C_k V(x_k / c,\, b) = 0. \tag{8}$$

Corollaire. *Pour une valeur rationnelle de l'argument différente de zéro, d'ailleurs arbitraire, ni* $V(x)$ *ni aucune de ses dérivées peuvent prendre une valeur rationnelle ou devenir zéro.*

§ **3.** Il ne sera pas sans intérêt pour une continuation éventuelle des recherches sur les fonctions qui nous occupent de montrer que même *le théorème de Lindemann* est applicable à ces fonctions.

En effet, soient

$$H_\nu(\xi) = \sum_0^{n_\nu}{}_\lambda a_{\lambda.\nu}\xi^\lambda = 0 \qquad \text{pour } \nu = 1, 2, \ldots r$$

une suite d'équations algébriques irréductibles à coefficients entiers, dont les racines seront respectivement

$$\xi_{1.\nu} \ldots \xi_{n_\nu.\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots r).$$

Tous les $a_{\lambda.\nu}$ doivent être supposés des entiers ou nuls.

Soient de plus $x_0 x_1 \ldots x_n$ des nombres rationnels quelconques ou des expressions linéaires à coefficients entiers des quantités données ξ; je suppose tous les x inégaux entre eux.

Soient encore $C_0 C_1 \ldots C_n$ des nombres rationnels quelconques qui ne sont pas tous égaux à zéro, et supposons qu'on ait choisi $x_0 x_1 \ldots x_n$, $C_0 C_1 \ldots C_n$ de manière que l'expression

$$W = \sum_0^n{}_k C_k V(x_k / c,\, b)$$

soit une fonction symétrique de chacun des systèmes

$$\xi_{1\nu} \ldots \xi_{n_\nu,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots r).$$

Ceci posé, j'établirai la proposition suivante:

Théorème. *Il ne peut exister, dans les conditions données, aucune relation de la forme*

$$W = 0. \tag{8}$$

En effet, nous pourrons, comme il a été déjà observé, supposer, sans diminuer la généralité des recherches, que tous les ξ soient des nombres algébriques *entiers*, que $C_0 C_1 \ldots C_n$ soient des entiers $\neq 0$, qui ne sont pas tous négatifs, et que $x_0 x_1 \ldots x_n$ soient de même des entiers ou des expressions linéaires des ξ à coefficients entiers.

Ceci posé, les $x_0 x_1 \ldots x_n$ étant de même des nombres algébriques entiers, désignons respectivement par $\theta_i(x)$ la fonction rationnelle entière irréductible qui s'annule pour $x = x_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$.

Je suppose que $C_0 C_1 \ldots C_n$ soient rangés de manière que

$$C_\beta \leq C_\alpha \text{ pour } \beta > \alpha.$$

Soit $C_{\mu+1}$ le premier des coefficients C qui soit inférieur à C_0, de sorte que

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_\mu = C > 0 \qquad (\mu \geq 0)$$

$$C_{\mu+i} < C, \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots$$

Comme W a été supposé symétrique dans chacun des systèmes ξ, il en sera évidemment de même pour chacune des sommes

$$\sum_0^n{}_k\, C_k x_k^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \text{ad inf.})$$

et par conséquent toutes ces sommes se réduiront à des nombres entiers.

Posons maintenant

$$\theta(x) = \prod_0^n{}_i\, \theta_i(x).$$

Soit $\chi(x)$ le plus grand diviseur commun de $\theta(x)$ et de $\theta'(x)$, et désignons par $\psi(x)$ le quotient de $\theta(x)$ par $\chi(x)$.

Il faut donc, comme on le sait, que $\psi(x)$ soit de même une fonction rationnelle entière de x à coefficients entiers. Soit

$$\psi(x) = \prod_0^{n+p} {}_i (x - x_i),$$

où $x_0 x_1 \ldots x_n$ seront les x donnés et $x_{n+1} \ldots x_{n+p}$ représenteront des nombres algébriques entiers étrangers, tous distincts et différents des $x_0 x_1 \ldots x_n$.

Chacune des sommes

$$\sum_0^{n+p} {}_k C x_k^\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots \text{ad inf.})$$

est par suite un nombre entier.

Cela posé, introduisons

$$C_{n+i} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots p$$

et posons

$$C'_k = C - C_k > 0, \text{ pour } k = \mu + 1, \ldots n + p;$$

chacune des sommes

$$\sum_{\mu+1}^{n+p} {}_k C'_k x_k^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \text{ad inf.})$$

se réduira à un nombre entier.

Par conséquent, le produit

$$\prod_{\mu+1}^{n+p} {}_k (x - x_k)^{C'_k}$$

représentera une fonction entière rationnelle de x à coefficients entiers.

Il en sera de même, comme on le sait, pour chacun des produits

$$\prod {}_k (x - x_k),$$

qui correspondent à tous les indices k, pour lesquels les C'_k prennent la même valeur.

Comme, par conséquent, le produit

$$\prod_{n+1}^{n+p} {}_k (x - x_k)$$

aussi bien que le produit

$$\prod_{\mu+1}^{n} {}_k (x - x_k)$$

seront des polynômes à coefficients entiers, il en sera enfin de même pour le produit

$$\prod_{0}^{n}{}_{k}\,(x-x_k).$$

Cela posé, en désignant par

$$\varphi(x)=\prod_{0}^{n}{}_{k}\,(x-x_k)$$

un facteur irréductible de ce dernier produit et par $F(x)$ un polynôme rationnel à coefficients entiers, d'ailleurs arbitraire, on trouvera que non seulement la somme

$$\sum_{0}^{n}{}_{k}\,C_k F(x_k)$$

mais encore les sommes

$$\sum_{0}^{n}{}_{k}\,C F(x_k)\quad \text{et}\quad \sum_{n+1}^{n}{}_{k}\,C_k F(x_k)$$

se réduiront à des nombres entiers.

Or, formons les fonctions

$$f_{\nu.\lambda}(x)=x^{\nu}\frac{\overline{\varphi(x)}^{\lambda}}{\lfloor\lambda}\prod_{\overline{n+1}}^{n}{}_{i}\,(x-x_i)^{p}\qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots\ \overline{n}).$$

λ et p pourront être choisis de la même manière que dans le numéro précédent (p. 249).

Toutes les fonctions

$$\lfloor\lambda\, f_{\nu.\lambda}(x)$$

seront, conformément à ce qui a été dit plus haut, des polynômes de x à coefficients entiers.

On aura (voir le numéro précédent)

$$0=f_{\nu.\lambda}(h)\,W=A+B+\Gamma.$$

où l'on a mis

$$A=C\sum_{0}^{n}{}_{k}\,f_{\nu.\lambda}(x_k+u)$$

$$B=\sum_{n+1}{}_{k}\,C_k f_{\nu.\lambda}(x_k+u)$$

$$\Gamma = \sum_0^n {}_k C_k \bar{\varphi}_{\nu.\lambda}(x_k) U(|x_k|).$$

A et B seront des nombres entiers, d'où il résulte que Γ sera de même entier.

p étant pris assez grand, on aura

$$|\Gamma| < 1, \text{ d'où } \Gamma = 0,$$

et, par conséquent, on aura encore

$$A + B = 0.$$

De plus, on a

$$B \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui entraîne

$$A \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si donc p est un nombre premier assez grand et supérieur à C, on aura

$$\sum_0^n {}_k \bar{f}_{\nu.\lambda}(x_k + u) \equiv 0 \pmod{p} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots \bar{n})$$

(en supposant λ choisi dans l'intervalle (i) p. 17).

Or

$$\sum_0^n {}_k \bar{f}_{\nu.\lambda}(x_k + u) = \sum_0^{\bar{n}} {}_k (x_k + u)^\nu \frac{\overline{\varphi(x_k + u)}^\lambda}{\underline{|\lambda}} \prod_{n+1}^n {}_i (x_k - x_i + u)^p.$$

p étant un nombre premier, on aura donc évidemment

$$\text{(11)} \qquad 0 \equiv \sum_0^n {}_k \bar{f}_{\nu.\lambda}(x_k + u) \equiv \sum_0^n {}_k (x_k + u)^\nu \frac{\overline{\varphi(x_k + u)}^\lambda}{\underline{|\lambda}} \prod_{n+1}^n {}_i (x_k - x_i)^p \pmod{p}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots n).$$

Si l'on suppose $n = 0$, la preuve ne sera dans la suite qu'une simple répétition de la preuve fournie dans le numéro précédent.

On pourra dès lors supposer que $n \geq 1$, et que tous les $x_0 x_1 \ldots x_n$ soient différents de zéro.

Avant de continuer, je crois bon d'introduire les définitions et notations suivantes ainsi que d'établir quelques lemmes préliminaires dont je me servirai dans ce qui suit.

Désignons par

$$\varphi(x) = x^{n+1} + \sum_0^n{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu$$

un polynôme irréductible quelconque à coefficients entiers et dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité; soit x_k une racine arbitraire de $\varphi(x) = 0$.

Définitions: Si $F(x)$ et $G(x)$ désignent des polynômes rationnels quelconques à coefficients entiers, et si l'on a

$$F(x) = G(x) + \varphi(x)\theta(x),$$

$\theta(x)$ désignant de même un polynôme rationnel à coefficients entiers, nous écrirons

$$F(x) \equiv G(x) \qquad (\text{mod. } \varphi).$$

Comme on le sait, il existera toujours parmi les fonctions $G(x)$ congrues à $F(x)$ un seul polynôme, soit

$$f(x) \equiv F(x) \qquad (\text{mod. } \varphi),$$

dont le degré n'est pas supérieur à n.

Posons

$$f(x) = \sum_0^n{}^{\nu}\, f_\nu x^\nu,$$

où $f_0 f_1 \ldots f_n$ seront, d'après ce qui précède, des nombres entiers ou nuls absolument déterminés.

La fonction $f(x)$ sera dite le *résidu* de $F(x)$ (mod. φ).

Si tous les coefficients f_ν sont des nombres entiers divisibles par p ou nuls, nous dirons que

$$F(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi)$$

$$F(x_k) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \quad (k = 0, 1, \ldots n).$$

Dans ce cas, on aura évidemment

$$\sum_0^n{}^{k}\, F(x_k) \text{ égal à un nombre entier} \equiv 0 \text{ (mod. } p).$$

Désignons de même par $g(x)$ le résidu de $G(x)$ (mod. φ).

Soit

$$g(x) = \sum_0^n{}^{\nu}\, g_\nu x^\nu.$$

Lemme I. Pour que

$$F(x) \equiv G(x) \qquad (mod.\ \varphi),$$

il faut et il suffit que $f(x)$ soit identiquement égal à $g(x)$.

Lemme II. Pour que

$$F(x) \equiv G(x) \qquad (mod.\ \varphi),$$

il faut et il suffit, que l'on ait

$$F(x_k) = G(x_k),$$

x_k désignant une racine donnée arbitraire de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

Corollaire. Comme cas particulier de ces lemmes, je rappelle que, si l'on à trouvé

$$F(x_k) = \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu x_k^\nu,$$

$a_0 a_1 \ldots a_{\bar{n}}$ désignant des nombres entiers ou nuls, on aura nécessairement

$$f(x) = \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu x^\nu.$$

Lemme III. On aura évidemment

$$F(x)\, G(x) \equiv f(x)\, g(x) \qquad (mod.\ \varphi).$$

Donc, pour que

$$F(x)\, G(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi),$$

il faut et il suffit que

$$f(x)\, g(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi).$$

Or, soient $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{\bar{n}}$ les racines de l'équation .

$$g(x) = 0,$$

de sorte que

$$g(x) = g_n \prod_1^n{}_\iota\, (x - \gamma_\iota),$$

et supposons que

$$f(x)\, g(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi).$$

Soit, pour fixer les idées,

$$f(x)\, g(x) = p\psi(x) + \varphi(x)\,\theta(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{0}^{n} {}_{\nu}\, \alpha_\nu x^\nu$$

$$\theta(x) = \sum_{0}^{n-1} {}_{\nu}\, \beta_\nu x^\nu$$

(α_ν, β_ν désignant des nombres entiers ou nuls).

On aura, par suite,

$$p\,\psi(\gamma_i) + \varphi(\gamma_i) \sum_{0}^{n-1} {}_{\nu}\, \beta_\nu \gamma_i^\nu = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots \overline{n})$$

Soit

$$D = \prod_{1}^{n} {}_{i}\, \varphi(\gamma_i)\, g'(\gamma_i),$$

et posons

$$\overline{D}_\lambda = \begin{vmatrix} 1\, \gamma_1 \ldots \gamma_1^{\lambda-1}\, \psi(\gamma_1)\, \gamma_1^{\lambda+1} \ldots \gamma_1^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1\, \gamma_n \ldots \gamma_n^{\lambda-1}\, \psi(\gamma_n)\, \gamma_n^{\lambda+1} \ldots \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix} g_n^n\, \Delta(\gamma_1 \ldots \gamma_n);$$

donc, nous aurons

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, D\, \beta_\lambda = -p\, D_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n).$$

$\overline{D}$ et $\overline{D}_\lambda$ représentent ici des fonctions symétriques de $\gamma_1 \ldots \gamma_n$ et doivent par conséquent se réduire à des nombres rationnels, dont les dénominateurs seront certaines dignités de g_n.

On trouve donc la proposition suivante:

Lemme IV. Désignons par $F(x)$ et $G(x)$ deux polynômes rationnels quelconques à coefficients entiers, et supposons que l'on ait

$$F(x)\, G(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p, \varphi).$$

Soit

$$G(x) \equiv g(x) \qquad (mod.\ \varphi),$$

où l'on aura

$$g(x) = \sum_{0}^{n} {}_{\nu}\, g_\nu x^\nu = g_n \prod_{1}^{n} {}_{i}\, (x - \gamma_i).$$

Soit $g_n^\varkappa$ une puissance de g_n assez grande pour que le produit suivant, savoir

(12) $$D = g_n^\varkappa \prod_{1}^{n} {}_{i}\, \varphi(\gamma_i)\, g'(\gamma_i),$$

soit un nombre entier.

Si, alors, p n'a pas de diviseur commun avec D et avec $g_{\bar{n}}$, on aura

$$F(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p,\ \varphi).$$

Corollaire I. Si l'on a

$$x F(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p,\ \varphi),$$

et que p n'ait pas de diviseur commun avec a_0, on aura

$$F(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p,\ \varphi).$$

Corollaire II. Soit $g(x)$ et $h(x)$ deux polynômes rationnels quelconques à coefficients entiers, et soit $G(x)$ le plus petit dividende commun de $g(x)$ et de $h(x)$.

Supposons que, pour une valeur donnée arbitraire de ν, on ait

$$h(x)\frac{u^\nu(x)}{\underline{|\nu}} \equiv 0 \qquad (mod.\ p,\ \varphi)$$

et

$$g(x)\frac{u^\nu(x)}{\underline{|\nu}} \equiv 0 \qquad (mod.\ p,\ \varphi).$$

Cela posé, si p n'a pas de diviseur commun avec a_0, c et b, on aura necessairement

$$G(x) \equiv 0 \qquad (mod.\ p,\ \varphi).$$

En effet, on aura, par hypothèse,

$$\left.\begin{aligned} G(x)\frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p,\ \varphi) \\ G(x)\frac{u^{\nu-1}}{\underline{|\nu-1}} &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p,\ \varphi) \end{aligned}\right\},$$

et, comme, à cause de l'équation (4), on aura

$$G(x)\frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} = (b + c\,\overline{\nu-1})\,G(x)\frac{u^{\nu-1}}{\underline{|\nu-1}} + c\,x\,G(x)\frac{u^{\nu-2}}{\underline{|\nu-2}},$$

il en résulte que

$$c x G(x)\frac{u^{\nu-2}}{\underline{|\nu-2}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p,\ \varphi),$$

d'où, d'après le corollaire I,

$$G(x)\frac{u^{\nu-2}}{\underline{|\nu-2}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p,\ \varphi).$$

De la même manière on établira de proche en proche que tous les

$$G(x)\frac{u^{\lambda}}{\underline{|\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi), \qquad \text{pour } \lambda \leq \nu.$$

Or, posons $\lambda = 1$, on aura

$$G(x)\, u^1(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi),$$

ou, en remplaçant $u^1(x)$ par b,

$$b\, G(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi),$$

d'où, par hypothèse,

$$G(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi).$$

C. Q. F. D.

Corollaire III. Cas spécial: p étant sans diviseur commun avec a_0, c et b, et ν désignant un entier positif quelconque, on ne peut avoir en même temps

$$\frac{u^{\nu}}{\underline{|\nu}} \equiv 0 \quad \textit{et} \quad \frac{u^{\nu-1}}{\underline{|\nu - 1}} \equiv 0 \qquad (\textit{mod. } p, \varphi).$$

Après cette digression, revenons sur la preuve de la proposition généralisée de M. Lindemann.

Si nous introduisons les notations suivantes:

$$C(x) = \prod_{n+1}^{n} i\,(x - x_i). \tag{13}$$

$$f_{\nu.\lambda}(x) = x^{\nu}\frac{\varphi(x)^{\lambda}}{\underline{|\lambda}}, \text{ et} \tag{14}$$

$$\psi_{k.\lambda}(x) = {\prod_{0}^{n}}' i\,(x - x_i)^{\lambda} \qquad (k = 0, 1 \ldots \bar{n};\ i \neq k), \tag{14'}$$

d'où

$$f_{\nu.\lambda}(x) = x^{\nu}\frac{(x - x_k)^{\lambda}}{\underline{|\lambda}}\psi_{k.\lambda}(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots \bar{n}). \tag{14''}$$

nous obtiendrons

$$f_{\nu.\lambda}(x_k + u) = (x_k + u)^{\nu}\left\{\frac{u^{\lambda}(x_k)}{\underline{|\lambda}}\psi_{k.\lambda}(x_k) + \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda}}\psi'_{k.\lambda}(x_k) + \frac{u^{\lambda+2}}{\underline{|\lambda}}\frac{\psi''_{k.\lambda}(x_k)}{\underline{|2}} + \cdots\right\}, \tag{15}$$

où l'on aura évidemment

(16) $$\psi_{k.\lambda}(x_k) = \varphi'(x_k)^\lambda.$$

Or, d'après (11), on aura

$$\sum_0^n{}_k \overline{C(x_k)}^p f_{\nu.\lambda}(x_k+u) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

ou, en d'autres termes,

$$0 \equiv \sum_0^n{}_k \overline{C(x_k)}^p (x_k+u)^\nu \left\{ \frac{u^\lambda}{\underline{|\lambda}} \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda + \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda}} \psi'_{k.\lambda}(x_k) + \cdots \right\} \qquad (\text{mod. } p).$$

Soient maintenant $\lambda - 1$ et λ deux entiers consécutifs dans l'intervalle (i), et supposons qu'on ait tous les

$$\frac{u^{\lambda+i}}{\underline{|\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi), \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots \text{ ad inf.}$$

On aura dès lors

$$0 \equiv \sum_0^n{}_k \overline{C(x_k)}^p \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda (x_k+u)^\nu \frac{u^\lambda}{\underline{|\lambda}} \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où

$$0 \equiv \sum_0^n{}_k \overline{C(x_k)}^p \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda x_k^\nu \frac{u^\lambda(x_k)}{\underline{|\lambda}} \qquad (\text{mod. } p),$$

ou, en d'autres termes,

(17) $$\sum_0^n{}_k \overline{C(x_k)}^p \overline{\varphi'(x_k)}^\lambda x_k^\nu \frac{u^\lambda(x_k)}{\underline{|\lambda}} = p A_\nu,$$

pour $\nu = 0, 1, \ldots n,$

$A_0, A_1 \ldots A_n$ étant des entiers.

Mettons, pour abréger,

(18) $$\begin{cases} D = \prod_0^n{}_k C(x_k) \text{ et} \\ \Phi = \prod_0^n{}_k \varphi'(x_k), \end{cases}$$

on aura

$$(19) \qquad D^p \Phi^{\lambda+1} \frac{u^\lambda(x_k)}{\lfloor\underline{\lambda}} = \pm\, p\, \varDelta_k(x_k) \prod_{0}^{\bar{n}}{}'_i\, \overline{C(x_i)}^p\, \overline{\varphi'(x_i)}^\lambda,$$

en désignant par $\varDelta_k(x_k)$ les déterminants

$$\varDelta_k(x_k) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & A_0 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & \ldots & x_{k-1} & A_1 & x_{k+1} & \ldots & x_{\bar{n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^{\bar{n}} & \ldots & x_{k-1}^{\bar{n}} & A_{\bar{n}} & x_{k+1}^{\bar{n}} & \ldots & x_{\bar{n}}^{\bar{n}} \end{vmatrix} : \varDelta(x_0, x_1 \ldots x_{\bar{n}}).$$

Le coefficient de p dans le membre droit de l'équation (19) sera évidemment une fonction entière rationnelle à coefficients entiers de $x_0\, x_1 \ldots x_{\bar{n}}$, symétrique par rapport à $x_0\, x_1 \ldots x_{k-1}\, x_{k+1} \ldots x_{\bar{n}}$; on pourra donc l'exprimer par une fonction entière rationnelle de x_k à coefficients entiers.

D et Φ se réduiront à des entiers $\neq 0$.

Donc, si l'on prend le nombre premier p plus grand que les valeurs numériques de D et de Φ, on aura

$$\frac{u^\lambda(x_k)}{\lfloor\underline{\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

et, par suite,

$$(20) \qquad \frac{u^\lambda(x)}{\lfloor\underline{\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi).$$

De la même manière on établira encore que

$$(21) \qquad \frac{u^{\lambda-1}(x)}{\lfloor\underline{\lambda - 1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi).$$

Si, d'autre part, on choisit le nombre premier p plus grand que la valeur numérique de a_0, de c et de b, ces deux relations simultanées (20) et (21) comporteront d'après le corollaire 3 (p. 261) une impossibilité.

Or, en effet, $p-2$ et $p-1$ sont deux entiers consécutifs dans l'intervalle (i), et l'on aura tous les

$$\frac{u^{p-1+i}}{\lfloor\underline{p-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p, \varphi), \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}$$

Nous avons donc établi l'impossibilite d'une relation

$$W = 0.$$

C. Q. F. D.

§ 4. Je tâcherai maintenant, à l'aide des fonctions u et des constantes h introduites dans ce qui précède, d'étudier de plus près les relations linéaires à coefficients rationnels qui peuvent exister entre des fonctions V différentes pour des arguments rationnels.

Soit

$V(x \mid c, b)$ une fonction V donnée arbitraire,

et soit

$V_\mu(x \mid c, b)$ sa dérivée $\mu^{\text{ième}}$.

On trouve (voir p. 19)

$$V(x \mid c, b + \mu c) = k_b^\mu V_\mu(x \mid c, b). \tag{1}$$

Nous introduisons la notation

$$h_\mu^r(c, b) = k_b^\mu h^r(c, b + \mu c),$$

d'où

$$\frac{h_\mu^r(c, b)}{\lfloor r} = k_b^\mu k_{b+\mu c}^r = k_b^{r+\mu}, \tag{2}$$

et nous mettons encore

$$u_\mu^\nu(x \mid c, b) = u^\nu(x \mid c, b + \mu c). \tag{3}$$

On aura

$$h^r(c, b + \mu c)\, V(x \mid c, b + \mu c) = [x + u(x \mid c, b + \mu c)]^r + \lambda_r x^r U_\mu(\mid x \mid),$$

d'où

$$h_\mu^r(c, b)\, V_\mu(x \mid c, b) = [x + u_\mu(x \mid c, b)]^r + \lambda_r x^r U_\mu(\mid x \mid),$$

ou, plus brièvement,

$$h_\mu^r V_\mu = (x + u_\mu)^r + \lambda_r x^r U_\mu(\mid x \mid). \tag{4}$$

Soit m un entier quelconque positif, et désignons par

$$f(x) = \sum_m^r{}^\nu a_\nu \frac{x^\nu}{\lfloor \nu} \tag{5}$$

une fonction rationnelle entière quelconque.

On aura, pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots m$,

$$f^{\mu}(x) = \sum_{m}^{\nu} a_{\nu} \frac{x^{\nu-\mu}}{\lfloor \nu-\mu},$$

d'où, d'après l'égalité (2),

$$f^{\mu}(h_{\mu}) = \sum_{m}^{\nu} a_{\nu} k_{b}^{\nu} = f(h). \tag{6}$$

Or, l'on aura

$$f(h)\, V = f(x+u) + \varphi(x)\, U(|x|)$$

ainsi que

$$f(h)\, V_{\mu} = f^{\mu}(h_{\mu})\, V_{\mu} = f^{\mu}(x+u_{\mu}) + \varphi_{\mu}(x)\, U_{\mu}(|x|), \tag{7}$$

pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots m$.

Je me servirai des équations (7) pour étudier de plus près les relations linéaires qui pourront exister d'abord entre trois fonctions consécutives, V_n, V_{n+1} et V_{n+2}, ou, en faisant un simple échange des paramètres, entre une fonction V quelconque et ses deux premières dérivées, V_1 et V_2.

En effet, soient d'abord $x_0\, x_1 \ldots x_n$, $C_0\, C_1 \ldots C_n$, $C'_0\, C'_1 \ldots C'_n$, $C''_0\, C''_1 \ldots C''_n$ des nombres rationnels donnés arbitraires.

Posons, pour abréger,

$$W_k(x) = C_k\, V(x) + C'_k\, V_1(x) + C''_k\, V_2(x),$$

et supposons qu'il existe une relation de la forme

$$W = \sum_{0}^{n} {}_{k}\, W_k(x_k) = 0. \tag{8}$$

On pourra, comme nous l'avons déjà plusieurs fois remarqué, supposer que tous les x et C soient des entiers et tous les x distincts.

Considérons d'abord le cas où

$$n = 0 \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

on aura

$$W = C_0\, V(0) + C'_0\, V'(0) + C''_0\, V''(0) = C_0 + \frac{C'_0}{b} + \frac{C''_0}{b(b+c)},$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que

$$W = 0,$$

deviendra, dans ce cas spécial, que

$$C_0 + \frac{C'_0}{b} + \frac{C''_0}{b(b+c)} = 0.$$

Dans tous les autres cas nous pourrons supposer comme auparavant que les x_i soient ordonnés de sorte que

$$x_0 \neq 0.$$

On aura

$$\frac{u_\alpha^{\nu-\alpha}}{|\underline{\nu-\alpha}} = (b + \overline{\nu-1}\, c)\frac{u_\alpha^{\nu-\alpha-1}}{|\underline{\nu-\alpha-1}} + cx\frac{u_\alpha^{\nu-\alpha-2}}{|\underline{\nu-\alpha-2}}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2;\quad \nu \geq \alpha + 2).$$

Posons donc, pour abréger,

$$(9)\qquad \begin{cases} v_k^0(x) = C_k \\ v_k^1(x) = bC_k + C'_k \\ \dfrac{v_k^2(x)}{|\underline{2}} = C_k\{cx + b(b+c)\} + C'_k(b+c) + C''_k = (b+c)v_k^1(x) + C_k cx + C''_k. \\ \text{et, pour l'indice } \nu \geq 3, \\ \dfrac{v_k^\nu(x)}{|\underline{\nu}} = C_k\dfrac{u^\nu(x)}{|\underline{\nu}} + C'_k\dfrac{u_1^{\nu-1}(x)}{|\underline{\nu-1}} + C''_k\dfrac{u_2^{\nu-2}(x)}{|\underline{\nu-2}}, \end{cases}$$

nous aurons, pour l'indice $\nu \geq 3$,

$$(10)\qquad \frac{v_k^\nu}{|\underline{\nu}} = (b + \overline{\nu-1}\, c)\frac{v_k^{\nu-1}}{|\underline{\nu-1}} + cx\frac{v_k^{\nu-2}}{|\underline{\nu-2}}.$$

En désignant par

$$f(x) = \sum_2^r{}_\nu\, a_\nu \frac{x^\nu}{|\underline{\nu}}$$

une fonction entière rationnelle donnée arbitraire, on obtiendra

$$(11')\qquad 0 = f(h)\, W = \sum_0^n{}_k [C_k f(x_k + u) + C'_k f'(x_k + u_1) + C''_k f''(x_k + u_2)] + \chi.$$

Or, étant

$$f^{(\alpha)}(x + u_\alpha) = \sum_2^r{}_\nu\, a_\nu \sum_0^{\nu-\alpha}{}_\mu \frac{x^\mu}{|\underline{\mu}}\, \frac{u_\alpha^{\nu-\alpha-\mu}}{|\underline{\nu-\alpha-\mu}},$$

on aura

$$C_k f(x+u) + C'_k f'(x+u) + C''_k f''(x+u) = f(x + v_k)$$

et, par suite, d'après l'équation (11'),

$$(11) \qquad 0 = \sum_0^n {}^k f[x_k + v_k(x_k)] + \chi = A + \chi.$$

Soient maintenant λ et p deux entiers positifs quelconques choisis de la même manière que p. 249.

Posons

$$f(x) = \frac{x^2(x - x_0)^\lambda}{|\underline{\lambda}} \prod_1^n {}^i (x - x_i)^p.$$

A représentera un nombre entier, tandis que l'on aura, pour p assez grand — quelle que soit la valeur de λ prise dans l'intervalle (i) —

$$|\chi| < 1,$$

ce qui entraîne

$$A = 0.$$

Or, l'on aura

$$A = [x_0 + v_0(x_0)]^2 \frac{v_0^\lambda(x_0)}{|\underline{\lambda}} \prod_1^n {}^i [x_0 - x_i + v_0(x_0)]^p +$$

$$+ \sum_1^n {}^k [x_k + v_k(x_k)]^2 \frac{[x_k - x_0 + v_k(x_k)]^\lambda}{|\underline{\lambda}} v_k^p(x_k) \prod_1^n {}^i [x_k - x_i + v_k(x_k)]^p.$$

Si donc p est un nombre premier assez grand, on aura

$$A \equiv [x_0 + v_0(x_0)]^2 \frac{v_0^\lambda(x_0)}{|\underline{\lambda}} \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i)^p \qquad (\text{mod. } p).$$

Supposons, de plus, que

$$p > \left| \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i) \right|,$$

on aura

$$(12) \qquad [x_0 + v_0(x_0)]^2 \frac{v_0^\lambda(x_0)}{|\underline{\lambda}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Si l'on remplace d'abord λ par $p - 1$, on obtiendra

$$x_0^2 \frac{v_0^{p-1}(x_0)}{|\underline{p-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

ou, si l'on a pris $p > |x_0|$,

$$\frac{v_0^{p-1}(x_0)}{|\underline{p-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Posons, en second lieu, $\lambda = p-2$; on aura pour la même raison

$$\frac{v_0^{p-2}(x_0)}{\lfloor p-2}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

D'après l'égalité (10) on aura dès lors, si l'on a pris

$$p > |cx_0|,$$

pour tous les $\nu < p-1$ (sauf éventuellement la valeur $\nu = 0$),

$$\frac{v_0^{\nu}(x_0)}{\lfloor\nu}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

On aura donc

$$v_0^1(x_0) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \qquad bC_0 + C'_0 = 0$$

$$v_0^2(x_0) = 0, \quad \text{et, par conséquent, } cx_0C_0 + C''_0 = 0.$$

On pourra aisément vérifier que les dernières égalités représentent la condition non seulement nécessaire mais encore *suffisante*, pour que l'on ait

$$W_0(x_0) = 0.$$

En effet, si l'on admet

$$C'_0 = -bC_0 \quad \text{et} \quad C''_0 = -cx_0C_0,$$

on aura

$$W_0(x_0) = C_0V(x_0) + C'_0V_1(x_0) + C''_0V_2(x_0) = C_0\{V(x_0) - bV_1(x_0) - cx_0V_2(x_0)\},$$

et $W_0(x_0)$ s'évanouira donc à cause de l'équation (1) p. 240.

Nous pouvons donc établir la proposition suivante:

Théorème. *$x_0x_1\ldots x_n$ désignant $(n+1)$ nombres rationnels inégaux, et $C_0C_1\ldots C_n$, $C'_0\ldots C'_n$, $C''_0\ldots C''_n$ étant des nombres rationnels quelconques, si l'on pose, pour abréger,*

$$W_k(x) = C_kV(x) + C'_kV_1(x) + C''_kV_2(x),$$

il ne peut exister une relation de la forme

$$W = \sum_0^n{}_k W_k(x_k) = 0, \tag{8}$$

sans que chacun des termes

$$W_k(x_k) = 0,$$

et, pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que, x_k étant $\neq 0$, $W_k(x_k)$ se réduise à l'expression

$$C_k\left[V(x_k) - b\,V_1(x_k) - c\,x_k\,V_2(x_k)\right], \tag{13}$$

qui est nulle par définition de la fonction V, ou que, x_k étant $= 0$, on ait

$$C'_k + \frac{C''_k}{b} + \frac{C'''_k}{b(b+c)} = 0.$$

J'observe que, b et c étant $\neq 0$, et $V(x)$, $V_1(x)$, $V_2(x)$ ne pouvant prendre aucune valeur rationnelle ou nulle pour des valeurs rationnelles quelconques de x différentes de zéro, aucun des termes de l'expression (13) ne peut s'évanouir ou prendre une valeur rationnelle.

Nous retrouvons donc sous une forme généralisée *le théorème précité de M. Hurwitz,*[1] à savoir

«*Pour des valeurs rationnelles données de l'argument différentes de zéro, d'ailleurs arbitraires, il ne peut jamais se faire que*

$$V,\quad V',\quad V'',\quad \frac{V'}{V}\quad ou\quad \frac{V''}{V}$$

soit égal à zéro ou ait une valeur rationnelle; et, d'une façon générale, il ne peut exister aucune relation de la forme

$$p\,V + q\,V' = r,\ ou$$
$$p\,V + q\,V'' = r,$$

p, q, r désignant des nombres rationnels, qui ne sont pas tous égaux à zéro.»

Des recherches de M. Hurwitz résulte, comme nous l'avons mentionné dans le § respectif, que, si la dérivée logarithmique de V a été développée en fraction continue, soit

$$c\,x\,\frac{V'}{V} = \left[\frac{c\,x}{k\,c + b}\right], \tag{14}$$

et si l'on désigne par

$$\frac{\psi_n}{\varphi_n}$$

la réduite $n^{\text{ième}}$ de cette fraction continue, on aura

$$(-1)^n c^n x^n V_n = \psi_n V - \varphi_n c x V_1, \tag{15}$$

où ψ_n et φ_n doivent être des polynômes rationnels de x, b et c à coefficients entiers.

[1] Hurwitz, loc. cit.

Soient maintenant $x_0\, x_1 \ldots x_n$ $(n+1)$ nombres rationnels inégaux; désignons par m un entier positif quelconque, et soient

$$C_k^\mu \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots n \\ \mu = 0, 1, \ldots m \end{pmatrix}$$

des nombres rationnels quelconques.

Posons, en outre,

$$W_k = \sum_0^m{}_\mu\, C_k^\mu\, V_\mu(x_k)$$

et

$$W = \sum_0^n{}_k\, W_k.$$

Nous aurons évidemment

$$W_k = \sum_0^m{}_\mu \frac{C_k^\mu\, \psi_\mu(x_k)}{(-c)^\mu x_k^\mu}\, V(x_k) - \sum_0^m{}_\mu \frac{C_k^\mu\, \varphi_\mu(x_k)}{(-c)^\mu\, x_k^\mu}\, c x_k\, V_1(x_k).$$

Posons, pour abréger,

$$W_k = \Psi_k(x_k)\; V(x_k) - \Phi_k(x_k)\; V_1(x_k).$$

On aura donc la proposition générale suivante:

Théorème. *Si nous supposons tous les $x_0\, x_1 \ldots x_n$ différents de zéro, W ne peut prendre aucune valeur rationnelle différente de zéro. Pour que*

$$W = 0,$$

il faut que chacun des termes

$$W_k = 0,$$

et, pour que cela ait lieu, on doit avoir

$$\Psi_k(x_k) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_k(x_k) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$W = 0,$$

doit donc être exprimée par un système de *critériums algébro-arithmétiques.*

J'observerai enfin qu'aussi le théorème de Lindemann peut sans grande difficulté être généralisé d'une façon analogue.

CHAPITRE III.

Sur quelques cas de séries hypergéométriques généralisées.

§ 1. La méthode employée dans le chapitre précédent peut être utilisée dans une certaine mésure pour une étude arithmétique aussi des intégrales de certaines équations différentielles d'un type plus général que celles que nous avons étudiées jusqu'ici.

Examinons par exemple d'un peu plus près les intégrales de l'équation différentielle suivante:

$$(1') \qquad \sum_0^m {}_\mu\, b_\mu x^\mu V_{\mu+1} = a_0 V,$$

équation dont celle qui a fait l'objet des recherches de M. HURWITZ est un cas spécial correspondant à $m = 2$.

Cette équation $(1')$ est à son tour un cas spécial de l'équation différentielle plus générale des séries hypergéométriques généralisées.

Appliquons les notations introduites dans ce qui précède. Soit $k_\lambda^\nu(-1)$ ou plus simplement

$$(2) \qquad \begin{cases} k_\lambda^\nu = \dfrac{\underline{|\lambda}}{\underline{|\lambda-\nu}}, \text{ pour } \nu \leq \lambda \\ \text{et } = 0, \text{ pour } \nu > \lambda. \end{cases}$$

$a_0, a_1 \ldots a_m$, $b_0 b_1 \ldots b_m$ désignant des nombres rationnels donnés arbitraires, soient de plus

$$f_\lambda = \sum_0^m {}_\nu\, a_\nu k_\lambda^\nu \quad \text{et} \quad g_\lambda = \sum_0^m b_\nu k_\lambda^\nu$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots \text{ad inf.}).$$

f_λ et g_λ pourront s'écrire sous la forme

$$(3') \qquad \begin{cases} f_\lambda = f(k_\lambda) \text{ et } g_\lambda = g(k_\lambda), \text{ où} \\ f(x) = \sum_0^m {}_\nu\, a_\nu x^\nu \text{ et } g(x) = \sum_0^m b_\nu x^\nu. \end{cases}$$

Soit, en outre,

$$F_0 = 1 = G_0,$$

et, pour $\lambda > 1$,

$$(4)\qquad \begin{cases} F(\lambda) = \prod_0^{\lambda-1}{}_i f_i \\ G(\lambda) = \prod_0^{\lambda-1}{}_i g_i \end{cases}$$

et posons enfin, pour abréger,

$$(5)\qquad H_\lambda = \frac{G(\lambda)}{F(\lambda)}.$$

Nous aurons donc

$$(6)\qquad f_\lambda H_{\lambda+1} = g_\lambda H_\lambda.$$

Ceci posé, considérons la fonction

$$(7)\qquad V = \sum_0^\infty{}_\lambda \frac{x^\lambda}{H_\lambda \lfloor\underline{\lambda}}.$$

Cette fonction, qui est le type des séries hypergéométriques généralisées, satisfait évidemment à l'équation différentielle

$$(1)\qquad b_m x^m V_{m+1} = \sum_1^m{}_\mu (a_\mu x - b_{\mu-1}) x^{\mu-1} V_\mu + a_0 V.$$

Si $a_m \neq 0$, mais $b_m = 0 = b_{m-1}$, la série (7) est, comme on le voit, toujours divergente et n'aura par conséquent pas de sens déterminé.

Si $a_m \neq 0$ et $b_m = 0$, mais $b_{m-1} \neq 0$, la fonction $V(x)$ aura en dehors de $x = \infty$ encore un point singulier essentiel situé à une distance finie de l'origine.

Si, finalement, $b_m \neq 0$, il est évident que la série (7) convergera dans tout le plan.

Nous bornerons — du moins pour le présent — nos recherches à ce dernier cas.

Dans le mémoire précité de M. Hurwitz, publié dans le tome 32 des Math. Annalen, l'auteur traite aussi les séries hypergéométriques généralisées.

M. Hurwitz part, en étudiant l'équation (1), de l'hypothèse essentielle que $b_m \neq 0$ et que $a_m = 0$. La série (7) sera alors non seulement convergente dans tout le plan, mais elle convergera si fortement, que $b_m^\mu x^{m\mu} V_\mu$ diminueront constamment et indéfiniment, lorsque l'indice μ va en croissant.

On peut par conséquent reprendre le raisonnement de la p. 239 et montrer que, dans les circonstances indiquées, il est impossible que toutes les relations

$$V : V_1 : V_2 : \ldots : V_m$$

soient rationnelles pour des valeurs rationnelles de l'argument.[1]

Dans ces recherches, nous pourrons cependant laisser de côté la restriction $a_m = 0$, qui est pour nous sans importance.

Désignons donc par $a_{m'}$ le nombre a_μ de l'indice le plus haut, qui est $\neq 0$. Supposons $b_m \neq 0$ et $m' \leq m$, de sorte que f_λ soit au plus du même degré dans λ que g_λ.

En désignant par r et s des constantes données arbitraires, nous aurons

$$V(rx \mid sa_0 \ldots sa_m, \; rsb_0 \ldots rsb_m) = V(x \mid a_0 \ldots a_m, \; b_0 \ldots b_m),$$

ce que nous abrégeons de la manière suivante:

$$V(rx \mid sa, \; rsb) = V(x \mid a, \; b).$$

Donc, il suffit encore pour ces fonctions plus générales de supposer, comme nous l'avons fait dans les cas précédents, que les paramètres $a_0 a_1 \ldots a_m$, $b_0 b_1 \ldots b_m$ soient des nombres *entiers*, avec $b_m > 0$ et $a_{m'} > 0$, et que l'argument x ne prenne pas d'autres valeurs algébriques que des valeurs algébriques *entières*.

[1] Hurwitz: loc. cit.

En corrigeant les épreuves de cette étude, mon attention a été attirée par un article publié ces jours-ci par M. O. Perron: Ueber lineare Differenzen- und Differentialgleichungen (Math. Annalen, Band 66, Heft. 4, 1909), où l'auteur consacre un chapitre aux recherches précitées de M. Hurwitz.

M. Perron, qui a développé l'algorithme bien connu, introduit dans un mémoire posthume de Jacobi et généralisant les fractions continues, a eu l'idée très naturelle de se servir de ces algorithmes afin de trouver, pour certaines fonctions générales, la correspondance exacte de la propriété que Legendre et Hurwitz ont prouvée pour les fonctions de Bessel à l'aide de l'algorithme ordinaire des fractions continues.

La proposition de M. Perron est énoncée de la manière suivante:

»*Désignons par $Q_0\, Q_1 \ldots Q_n$ une suite de polynômes rationnels, soit*

$$Q_i(x) = \sum_0^i {}_\lambda a_{\lambda \, . \, i} x^\lambda \qquad (i = 0, 1, \ldots n),$$

où nous supposons $a_{n \, . \, n} \neq 0$.

Il existera toujours une fonction entière transcendante, soit

$$y = V(x),$$

déterminée à un facteur constant près, qui satisfait à l'équation différentielle

$$Q_n(x) y^{(n+1)} + \ldots + Q_1(x) y'' + Q_0(x) y' - y = 0.$$

Or, soient tous les $a_{\lambda \, . \, i}$ des nombres rationnels et x_0 un nombre rationnel quelconque, qui n'a nule pas le coefficient $Q_n(x_0)$, et désignons par $C_0\, C_1 \ldots C_n$ des nombres rationnels quelconques, qui ne soient pas tous égaux à zéro.

Il ne peut jamais exister une relation de la forme

$$\sum_0 {}_k C_k V_k(x_0) = 0.$$

Nous avons trouvé (lemme 2, p. 242), pour des valeurs quelconques de r et de $\lambda < r$, les relations suivantes:

$$(8)\qquad \begin{cases} f_r = \sum\limits_0^m {}_\nu\, k_{r-\lambda}^\nu \dfrac{f^\nu(k_\lambda)}{\underline{|\nu}} = f_\lambda + \sum\limits_1^m {}_\nu \dfrac{\underline{|r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda-\nu}\,\underline{|\nu}} f^\nu(k_\lambda) \\ g_r = \sum\limits_0^m {}_\nu\, k_{r-\lambda}^\nu \dfrac{g^\nu(k_\lambda)}{\underline{|\nu}} = g_\lambda + \sum\limits_1^m {}_\nu \dfrac{\underline{|r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda-\nu}\,\underline{|\nu}} g^\nu(k_\lambda). \end{cases}$$

Introduisons maintenant une suite de fonctions $u^\lambda(x)$ par les formules récurrentes suivantes.

Soit $u^0 = 1$, et soit, pour $\lambda \geq 1$,

$$f_\lambda \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} = \sum_0^m {}_\nu\, \alpha_\nu(\lambda) x^\nu \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}} - \sum_1^m {}_\nu\, \beta_\nu(\lambda) x^\nu \frac{u^{\lambda+1-\nu}}{\underline{|\lambda+1-\nu}} =$$

$$= \sum_0^m {}_\nu \{\alpha_\nu(\lambda) - x\beta_{\nu+1}(\lambda)\} x^\nu \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}},$$

$$\text{où } \beta_{m+1} = 0,$$

et où l'on aura encore

$$\alpha_\nu(\lambda) = 0 \text{ et } \beta_\nu(\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda < \nu.$$

Nous aurons donc, en nous servant de notations symboliques analogues à celles introduites dans le chapitre précédent,

$$f_r \frac{(x+u)^{r+1}}{\underline{|r+1}} - f_r \frac{x^{r+1}}{\underline{|r+1}} = \sum_0^r {}_\lambda\, f_r \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} =$$

$$= \sum_0^r {}_\lambda\, f_\lambda \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} + \sum_1^m {}_\nu\, x^\nu \sum_0^{r-\nu} {}_\lambda \frac{f^\nu(k_\lambda)}{\underline{|\nu}} \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} \frac{x^{r-\lambda-\nu}}{\underline{|r-\lambda-\nu}}$$

$$= \sum_0^m {}_\nu\, x^\nu \sum_\nu^r {}_\lambda\, \alpha_\nu(\lambda) \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}} \cdot \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} - \sum_1^m {}_\nu\, x^\nu \sum_\nu^r {}_\lambda\, \beta_\nu(\lambda) \frac{u^{\lambda+1-\nu}}{\underline{|\lambda+1-\nu}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} +$$

$$+ \sum_1^m {}_\nu\, x^\nu \sum_\nu^r {}_\lambda \frac{f^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} \frac{u^{\lambda+1-\nu}}{\underline{|\lambda+1-\nu}} \cdot \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}}.$$

Je pose

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\nu(\lambda) &= \frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} \\ \beta_\nu(\lambda) &= \frac{f^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} \end{aligned}\right\} (\nu = 0, 1 \ldots m).$$

et je trouve

$$f_r \frac{(x+u)^{r+1}}{\underline{|r+1}} - f_r \frac{x^{r+1}}{\underline{|r+1}} = \sum_0^m {}_\nu\, x^\nu \sum_\nu^r {}_\lambda \frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}} =$$

$$\sum_0^m {}_\nu \sum_0^{r-\nu} {}_\lambda \frac{g^\nu(k_\lambda)}{\underline{|\nu}} \frac{u^\lambda}{\underline{|\lambda}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda-\nu}} =$$

$$\sum_0^m {}_\nu \sum_0^r {}_\lambda\, k^\nu_{r-\lambda} \frac{g^\nu(k_\lambda)}{\underline{|\nu}} \frac{u^\lambda}{\underline{|\lambda}} \frac{x^{r-\lambda}}{\underline{|r-\lambda}},$$

ou

$$f_r \frac{(x+u)^{r+1}}{\underline{|r+1}} - f_r \frac{x^{r+1}}{\underline{|r+1}} = g_r \frac{(x+u)^r}{\underline{|r}}.$$

On a donc

$$(9) \qquad \frac{(x+u)^{r+1}}{\Pi_{r+1}\underline{|r+1}} = \sum_0^{r+1} {}_\nu \frac{x^\nu}{\Pi_\nu \underline{|\nu}}.$$

Les fonctions $u^\nu(x)$ doivent ici être définies par les formules de récurrence suivantes:

u^0 désignera toujours le nombre un, et, pour $\lambda \geq 0$, on aura

$$(10) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_0^m {}_\nu \frac{f^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} x^\nu \frac{u^{\lambda+1-\nu}}{\underline{|\lambda+1-\nu}} = \sum_0^m {}_\nu \frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} x^\nu \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}}, \text{ ou} \\ \displaystyle f_\lambda \frac{u^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda+1}} = \sum_0^m {}_\nu \left[\frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}} - x\frac{f^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1})}{\underline{|\nu+1}}\right] x^\nu \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}} \end{cases}$$

Si nous introduisons ensuite la notation

$$h^r = u^r(0) = \underline{|r} \frac{G(r)}{F(r)} = \underline{|r}\, t_r,$$

nous aurons

$$(11') \qquad h^r V = (x + u)^r - x^r \chi_r(x),$$

où

$$\chi_r(x) = \sum_1^r {}_\nu \frac{t_r \underline{|r}}{t_{r-\nu} \underline{|r-\nu}} x^{-\nu}.$$

Or, nous avons supposé

$$m \quad m'$$

A partir d'une certaine valeur λ_0 de λ, on aura par suite

$\left|\frac{\lambda g_{\lambda-1}}{f_{\lambda-1}}\right|$ supérieur à 1, et constamment et indéfiniment croissant avec λ,

et il en sera de même pour

$$\left|x_\lambda \underline{|\lambda}\right|.$$

Or, soit M la plus grande et m la plus petite des valeurs que prend

$$\left|\frac{\lambda g_{\lambda-1}}{f_{\lambda-1}}\right| \text{ pour } \lambda \leq \lambda_0 .$$

On peut toujours trouver un nombre $z > \lambda_0$, assez grand pour que

$$\left|x_z \underline{|z}\right| > \left(\frac{M}{m}\right)^{\lambda_0},$$

et que, pour toute valeur de λ inférieure à z,

$$\left|x_\lambda \underline{|\lambda}\right| < \left|x_z \underline{|z}\right|.$$

Soit maintenant, en premier lieu, $r \geq z$, on aura évidemment

$$\left|\frac{x_r \underline{|r}}{x_{r+\nu} \underline{|r+\nu}}\right| \leq \left|\frac{x_z \underline{|z}}{x_{z+\nu} \underline{|z+\nu}}\right| \leq \left|\frac{x_z \underline{|z}}{x_\nu \underline{|\nu}}\right|.$$

En second lieu, si $r < z$ et $\nu > \lambda_0$, on aura

$$\left|x_r \underline{|r}\right| < \left|x_z \underline{|z}\right|$$

et

$$\left|\frac{1}{x_{r+\nu} \underline{|r+\nu}}\right| < \left|\frac{1}{x_\nu \underline{|\nu}}\right|.$$

Soit enfin $\nu < \lambda_0$, on aura

$$\left|\frac{x_r \underline{|r}}{x_{r+\nu} \underline{|r+\nu}}\right| \leq \frac{1}{m^\nu}$$

et

$$\left|x_\nu \underline{|\nu}\right| \leq M^\nu,$$

d'où

$$\left|\frac{x_r \underline{|r}}{x_{r+\nu} \underline{|r+\nu}}\, x_\nu \underline{|\nu}\right| \leq \left(\frac{M}{m}\right)^\nu \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\lambda_0} < \left|x_z \underline{|z}\right|.$$

Par conséquent, on aura dans tous les cas

$$\left|\frac{\pi_r \underline{|r}}{\pi_{r+\nu}\underline{|r+\nu}}\right| \leq \left|\frac{\pi_\varkappa \underline{|\varkappa}}{\pi_\nu \underline{|\nu}}\right|.$$

Soit dès lors

$$U(x) = \left|\pi_\varkappa \underline{|\varkappa}\right| \sum_{0}^{\prime}{}_{\nu} \frac{x^\nu}{\left|\pi_\nu \underline{|\nu}\right|},$$

on aura toujours

$$|\chi_r(x)| \leq U(|x|).$$

L'équation ($11'$) pourra donc être écrite sous la forme suivante

$$(11) \qquad h^r V = (x+u)^r + \lambda_r x^r U(|x|), \text{ où } |\lambda_r(x)| \leq 1.$$

Soit, comme auparavant,

$$f(x) = \sum_{0}^{n}{}_{\nu} a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}$$

une fonction rationnelle entière quelconque, et posons

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{n}{}_{\nu} a_\nu \lambda_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}},$$

nous aurons

$$(12) \qquad f(h)V(x) = f(x+u) + \varphi(x)U(|x|),$$

où l'on aura

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{0}^{n}{}_{\nu} \left| a_\nu \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}} \right|.$$

Soient $x_0 x_1 \ldots x_n$ $(n+1)$ nombres donnés rationnels inégaux — il suffit de les supposer tous entiers — et soient $C_0 C_1 \ldots C_n$ des entiers quelconques $\neq 0$.

Posons, pour abréger,

$$W = \sum_{0}^{n}{}_{k} C_k V(x_k),$$

et supposons qu'on ait

$$(13) \qquad W = 0.$$

Soient λ et p deux entiers positifs, dont $p > \lambda$.

Nous supposons, comme dans le chapitre précédent, que p soit un nombre impair et que λ doive être choisi dans l'intervalle

$$(i) \qquad \frac{p-1}{2} < \lambda < p-1 .$$

Soit, de plus,

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^\lambda}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n {}^i (x-x_i)^p ,$$

on aura

$$(14) \qquad 0 = f(h) \sum_0^n {}^k C_k V(x_k) = A + B + C ,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$A = C_0 \frac{u^\lambda(x_0)}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n {}^i (x_0 - x_i + u(x_0))^p$$

$$B = \sum_1^n {}^k C_k \frac{[x_k - x_0 + u(x_k)]^\lambda}{\underline{|\lambda}} u^p(x_k) \prod_1^n {}^{\prime i} (x_k - x_i + u(x_k))^p$$

$$C = \sum_0^n {}^k C_k \varphi(x_k) U(|x_k|) .$$

p peut être pris assez grand, pour que

$$|C| \text{ soit} < 1,$$

quelle que soit la valeur donnée de λ, prise dans l'intervalle (i).

Des relations analogues peuvent facilement être démontrées aussi pour des combinaisons linéaires arbitraires entre V et ses dérivées.

En effet, on aura, V_μ désignant toujours la derivée $\mu^{\text{ième}}$ de V,

$$V = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{F_\nu x^\nu}{G_\nu \underline{|\nu}} = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{x^\nu}{a_\nu \underline{|\nu}} ,$$

$$V_\mu = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{F_{\nu+\mu} x^\nu}{G_{\nu+\mu} \underline{|\nu}} = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{x^\nu}{a_{\nu+\mu} \underline{|\nu}} ,$$

$$h^\nu V_\mu = \underline{|\nu}\, x_\nu V_\mu = \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|\nu-\mu}} (x + u_\mu)^{\nu-\mu} + R ,$$

où j'ai désigné, pour abréger, par R le restant des termes.

Donc

$$f(h)\,V_\mu = f^\mu(x+u_\mu) + R.$$

Soit

$$W = \sum_{0}^{n}{}_{\mu}\, C_\mu V_\mu(x),$$

il en résulte que

$$f(h)\,W = \sum_{0}^{n}{}_{\mu}\, C_\mu f^\mu(x+u_\mu) + R\,.$$

Dès lors, si l'on pose

$$\frac{v^\lambda}{|\underline{\lambda}} = \sum_{0}^{n}{}_{\mu}\, C_\mu \frac{u_\mu^{\lambda-\mu}}{|\underline{\lambda-\mu}},$$

on aura

$$f(v) = \sum_{0}^{n}{}_{\mu}\, C_\mu f^\mu(u_\mu),$$

d'où

(15) $$f(h)\,W = f(x+v) + R.$$

Or, mettons

$$f_{\lambda+\mu} = h(k_\lambda) \text{ et } g_{\lambda+\mu} = i(k_\lambda),$$

d'où, d'après le lemme 2, p. 242, on aura

$$h^\nu(k_\lambda) = f^\nu(k_{\lambda+\mu}) \text{ et } i^\nu(k_\lambda) = g^\nu(k_{\lambda+\mu}),$$

ce qui nous donne

$$f_{\lambda+\mu}\frac{u_\mu^{\lambda+1}}{|\underline{\lambda+1}} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\left\{\frac{i^\nu(k_{\lambda-\nu})}{|\underline{\nu}} - x\frac{h^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1})}{|\underline{\nu+1}}\right\}x^\nu\frac{u_\mu^{\lambda-\nu}}{|\underline{\lambda-\nu}} =$$

$$= \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\left\{\frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu+\mu})}{|\underline{\nu}} - x\frac{f^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1+\mu})}{|\underline{\nu+1}}\right\}x^\nu\frac{u_\mu^{\lambda-\nu}}{|\underline{\lambda-\nu}}\,.$$

Donc

$$f_\lambda\frac{u_\mu^{\lambda-\mu+1}}{|\underline{\lambda-\mu+1}} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\left\{\frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{|\underline{\nu}} - x\frac{f^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1})}{|\underline{\nu+1}}\right\}x^\nu\frac{u_\mu^{\lambda-\nu-\mu}}{|\underline{\lambda-\nu-\mu}},$$

et il en résulte que

(16) $$f_\lambda\frac{v^{\lambda+1}}{|\underline{\lambda+1}} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\left\{\frac{g^\nu(k_{\lambda-\nu})}{|\underline{\nu}} - x\frac{f^{\nu+1}(k_{\lambda-\nu-1})}{|\underline{\nu+1}}\right\}x^\nu\frac{v^{\lambda-\nu}}{|\underline{\lambda-\nu}}.$$

A l'aide de ces équations (15) et (16), on pourra toujours rendre l'étude de combinaisons linéaires quelconques de V et de toutes ses derivées analogue à l'étude de la seule fonction V, et, par suite, nous pourrons nous borner, dans ce qui suit, à cette dernière étude.

En effet, le raisonnement suivant ne rencontre pas de difficultés.

Désignons par

$$W_k = \sum_1^{m_k}{}_\mu \gamma_\mu^k V_\mu(x)$$

une combinaison linéaire quelconque des $V, V_1 \ldots V_{m_k}$, dont les coefficients γ_μ^k soient des nombres rationnels ou des fonctions rationnelles de x à coefficients rationnels.

W_k se réduira toujours, à l'aide de l'équation (1) et des équations qui en auront été obtenues par des différentiations successives, à une combinaison de la forme

$$W_k = \sum_0^{m}{}_\mu C_\mu^k V_\mu(x),$$

dont les coefficients C_μ^k seront de la même nature que γ_μ^k.

Soient $x_0 x_1 \ldots x_n$ $(n + 1)$ valeurs rationnelles de l'argument, toutes distinctes, d'ailleurs arbitraires, et posons

$$W = \sum_0^{n}{}_k W_k(x_k).$$

Si l'on a montré, par les méthodes ici appliquées, l'impossibilité de toute relation de la forme

$$\sum{}_k C_k V(x_k) = 0,$$

(C_k et x_k étant tous des nombres rationnels), sauf le cas où tous les C_k s'évanouissent, on pourra toujours démontrer, d'une manière tout à fait analogue, la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante, pour que

$$W = 0,$$

est qu'on ait chacun des termes

$$W_k(x_k) = 0,$$

et cela ne peut avoir lieu, sans que tous les C_μ^k s'annulent (sauf le cas, bien entendu, où l'on a $x_k = 0$, ce qui entraîne, en effet, une solution spéciale évidente).

§ 2. Nous nous bornons dans ce § au cas spécial de l'équation (1′).

On doit substituer dans l'équation (1)

$$a_m = 0 = a_{m-1} = \cdots = a_1\,;\ a_0 \neq 0.$$

Comme

$$V(x \,|\, a_0, b) = V(a_0 x \,|\, 1, b),$$

on peut toujours supposer $a_0 = 1$.

On voit alors, à l'aide des équations (10), que tous les $\dfrac{u^{\nu}}{\underline{|\nu}}$ sont des entiers.

Il en sera de même pour A et B, et l'on établira comme dans le chapitre II § 2 que

$$A + B = 0.$$

$$B \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

d'où encore

$$A \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

tandis que, p étant un nombre premier,

$$A \equiv C_0 \frac{u^{\lambda}(x_0)}{\underline{|\lambda}} \prod_1^n i\,(x_0 - x_i)^p \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

d'où, si l'on prend le nombre premier p suffisamment grand, on tire

(17) $$\frac{u^{\lambda}(x_0)}{\underline{|\lambda}} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

Supposons, d'après le raisonnement repété plusieurs fois dans ce qui précède, que

$$x \quad [illegible]\,,$$

et choisissons d'abord le nombre premier

$$p > |\, b_m x_0 \,|.$$

Soit encore

$$\frac{p-1}{2} > m,$$

et soient $\nu, \nu - 1, \ldots \nu - m$ $(m + 1)$ nombres consécutifs dans l'intervalle (i), on aura, d'après l'équation (17),

$$\frac{u^{\nu-\varkappa}(x_0)}{\underline{|\nu - \varkappa}} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ p) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots m).$$

Il en résulte d'après (10)

$$b_m x_0^m \frac{u^{\nu-m-1}}{\underline{|\nu-m-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où

$$\frac{u^{\nu-m-1}}{\underline{|\nu-m-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \text{ etc.}$$

Finalement, on aura donc

$$u^0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

ce qui est impossible.

Nous aurons donc le théorème enoncé:

Théorème. *L'équation*

$$W = 0$$

comporte dans tous les cas une impossibilité.

Corollaire. *Même une relation linéaire à coefficients rationnels entre la fonction V et ses dérivées est donc, d'après ce que nous avons dit dans le § précédent, impossible pour des arguments rationnels, sauf les relations, qui sont identiquement réductibles à l'équation différentielle (1'), et sauf la relation évidente qui existe entre des fonctions V arbitraires pour $x = 0$.*

Remarquons enfin que même le théorème de Lindemann se déduit ici sans difficulté.

§ 3. Mon intention a été de poursuivre ces études jusqu'à considérer certains types généraux des séries hypergéométriques généralisées. Si cela réussissait, on obtiendrait, comme on peut facilement le montrer, un point de départ important, qui permettrait d'approfondir considérablement l'étude de notre problème et notamment de l'étendre des relations linéaires entre des fonctions V données à des relations de degré supérieur.

Je me permettrai de rendre compte ici de quelques-unes de mes recherches préliminaires sur certains types plus généraux que ceux qui ont été étudiés dans le § précédent. Elles donnent une idée des difficultés que l'on rencontre, lorsqu'il s'agit de s'attaquer au problème général.

Considérons d'abord la fonction suivante d'un type plus général

$$(18^*) \qquad V = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, \frac{x^{\nu}}{\Pi_{\nu}}.$$

où l'on a mis

$$H_\nu = h_0 h_1 \ldots h_{\nu-1}$$

$$h_\lambda = h(k_\lambda),$$

$h(x)$ désignant une fonction rationnelle entière à coefficients rationnels, soit

$$(18\,\mathrm{h}) \qquad h(x) = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\, b_\nu x^\nu.$$

Pour plus de précision, nous supposons toujours qu'on ait obtenu, par un échange convenable des paramètres, tous les b_ν entiers.

Si h_λ possède un facteur de la forme $\lambda - \varkappa$, $\varkappa$ désignant un nombre entier quelconque positif, négatif ou nul, V doit être ramené aux fonctions déjà étudiées dans le numéro précédent.

Je suppose donc que h_λ n'ait pas de facteur pareil.

Nous aurons donc tous les $h_\lambda \neq 0$, et, par suite, la fonction V définie par l'égalité (18*) aura toujours un sens déterminé.

J'ajouterai l'observation suivante dont je ferai usage plus loin:

On aura, ce qui est facile à vérifier, pour des valeurs quelconques de λ et de ν,

$$k^\nu_{\lambda-1-\varkappa} \equiv (-1)^\nu k^\nu_{\varkappa+\nu} \pmod{\lambda} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Par suite, si l'on met

$$(18\,\alpha) \qquad \alpha_\varkappa = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\, (-1)^\nu b_\nu k^\nu_{\varkappa+\nu},$$

on aura toujours

$$h_{\lambda-1-\varkappa} \equiv \alpha_\varkappa \pmod{\lambda} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ceci posé, supposons qu'on ait pour une valeur donnée de $\varkappa$, soit pour $\varkappa = \varkappa_0$,

$$\alpha_{\varkappa_0} = 0;$$

on aura évidemment tous les h_λ divisibles par $(\lambda + \varkappa_0 + 1)$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Par conséquent, on aura tous les

$$\alpha_\varkappa \neq 0.$$

Supposons maintenant que h_λ contienne un facteur linéaire de λ, soit

$$h_\lambda = (b + c\lambda) g_\lambda.$$

Par hypothèse, on devra avoir évidemment $b \neq 0$, et, d'une façon générale,

$|b|$ ne doit pas être divisible par $|c|$.

Posons, d'après les notations introduites plus haut,

$$k_b^\nu = b(b+c)\ldots(b+c\nu-1),$$

l'égalité (18^*) se transformera dans

$$V = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^\nu}{k_b^\nu G_\nu}. \tag{18}$$

C'est-là la fonction que je veux étudier.

Considérons d'abord la fonction plus simple

$$V = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^\nu}{k_b^\nu}. \tag{18'}$$

Cette fonction est une généralisation très simple de la fonction exponentielle, et, pour le cas que nous avons excepté,

$$b \equiv 0 \qquad (\text{mod. } c),$$

elle se transformera dans ladite fonction.

Je rappelle en passant que M. Ratner a montré, Math. Annalen tome 32, l'impossibilité de généraliser jusqu'à ce type de fonction les lemmes auxiliaires sur lesquels M. Hurwitz basait dans ses recherches antérieures sa démonstration.

Cependant le raisonnement de M. Ratner montre seulement que les *méthodes* employées par M. Hurwitz ne se laissent pas généraliser au delà de certains types de fonctions déterminés, mais ne prouve rien contre la possibilité d'une extension pareille des *résultats* auxquels M. Hurwitz a voulu arriver.

La fonction V, définie par l'équation ($18'$), est évidemment une intégrale particulière de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$c x V_1 + (b - c - x) V = b - c \tag{19'}$$

ou de l'équation différentielle linéaire homogène

$$c x V_2 + (b - x) V_1 - V = 0. \tag{19}$$

L'intégrale générale de ces équations doit être représentée, comme on le voit, par une combinaison linéaire de l'intégrale particulière donnée par l'équation ($18'$) et d'une fonction exponentielle.[1]

[1] Je me sers ici et ailleurs de ce terme dans le sens étendu d'une combinaison de fonctions algébriques et de séries exponentielles de fonctions algébriques.

L'équation (19) est, comme on le voit, un cas particulier de l'équation (1), pour

$$m = 1, \quad b_1 = c \quad b_0 = b \quad a_1 = 1 = a_0.$$

Les formules récurrentes de (10) se transforment dans

$$(21) \qquad \left|\begin{array}{l} u^0 = 1, \quad u^1 = b, \quad \text{et pour} \quad \nu \geq 1 \\ u^{\nu+1} = (b + c\,\nu - x)\,u^\nu + c\,\nu\,x\,u^{\nu-1}, \\ \text{ou encore} \\ u^\nu(x+u) = c\,\nu\,u^{\nu-1}(x+u) + b\,u^\nu. \end{array}\right.$$

Tous les u^ν sont donc des nombres entiers.

J'aurai à substituer dans les équations (11) et (12)

$$h = k_b,$$

et j'obtiens, d'après cette dernière,

$$(22) \qquad f(k_b)\,V = f(x+u) + \varphi(x)\,U(|x|).$$

Soient maintenant s et r des entiers positifs quelconques, on aura

$$\frac{u^s(x+u)^r}{\underline{|s}\ \underline{|r-1}} = \frac{x+u}{\underline{|s}} \sum_0^{r-1}{}_\nu \frac{u^{\nu+s}}{\underline{|\nu}} \frac{x^{r-1-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}}$$

$$= \frac{c(x+u)}{\underline{|s}} \sum_0^{r-1}{}_\nu (\nu+s) \frac{u^{\nu+s-1}}{\underline{|\nu}} \frac{x^{r-1-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}} + b\,\frac{u^s(x+u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r-1}}$$

$$\frac{c(x+u)}{\underline{|s}} \sum_1^{r-1}{}_\nu \frac{u^{\nu+s-1}}{\underline{|\nu-1}} \frac{x^{r-1-\nu}}{\underline{|r-1-\nu}} + \frac{c\,u^{s-1}(x+u)^r}{\underline{|s-1}\ \underline{|r-1}} + b\,\frac{u^s(x+u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r-1}}$$

$$\frac{c\,u^s(x+u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r-2}} + \frac{c\,u^{s-1}(x+u)^r}{\underline{|s-1}\ \underline{|r-1}} + b\,\frac{u^s(x+u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r-1}}$$

$$(b + c\,r - 1)\,\frac{u^s(x+u)^{r-1}}{\underline{|s}\ \underline{|r-1}} + \frac{c\,u^{s-1}(x+u)^r}{\underline{|s-1}\ \underline{|r-1}},$$

d'où

$$(23) \qquad \frac{u^s(x+u)^r}{k_c^s\ k_b^r} = \frac{u^s(x+u)^{r-1}}{k_c^s\ k_b^{r-1}} + \frac{u^{s-1}(x+u)^r}{k_c^{s-1}\ k_b^r}$$

Soit q le plus petit des nombres r et s.

Par l'application itérée de la formule (23), on trouvera évidemment pour chaque nombre entier

$$\mu \leq q:$$

$$\frac{u^s}{k_c^s}\frac{(x+u)^r}{k_b^r} = \left(\frac{u}{k_c}\right)^{s-\mu}\left(\frac{x+u}{k_b}\right)^{r-\mu}\left(\frac{u}{k_c}+\frac{x+u}{k_b}\right)^{\mu},$$

d'où l'on tire, d'après le lemme 4, p. 12,

$$\frac{c^{\mu}}{\underline{|\mu}}\, u^s (x+u)^r = \text{nombre entier.}$$

Or, cette proposition pourra s'étendre encore à la fonction (18) de type plus général.

En effet, d'après les équations (11) et (12) on aura, en mettant

$$h^r = H_r,$$

$$(24) \qquad f(h)\, V(x) = f(x+u) + \varphi(x)\, U(|x|),$$

où les u^{ν} (voir l'équation (10)) seront introduits par les formules récurrentes suivantes

$$(25) \qquad \begin{cases} u^0 = 1, \quad u^1 = h_0 \quad \text{et, pour } \lambda \geq 1, \\ (x+u)\dfrac{u^{\lambda}}{\underline{|\lambda}} = \displaystyle\sum_{0}^{m}{}_{\nu} \frac{h^{\nu}(k_{\lambda-\nu})}{\underline{|\nu}}\, x^{\nu}\, \frac{u^{\lambda-\nu}}{\underline{|\lambda-\nu}}. \end{cases}$$

Tous les u_{ν} se réduiront à des nombres entiers, et, par suite, tous les

$$v^r \quad (x+u)^r$$

seront de même des entiers.

De plus, on aura

$$v^r = x^r + h_{r-1}\, v^{r-1}.$$

Donc, nous aurons, en désignant par r et s des entiers positifs quelconques,

$$v^r \frac{u^s}{\underline{|s}} = \sum_{0}^{s}{}_{\lambda} \frac{v^{r+\lambda}}{\underline{|\lambda}}\frac{(-x)^{s-\lambda}}{\underline{|s-\lambda}} + \sum_{0}^{s}{}_{\lambda} h_{r+\lambda-1}\frac{v^{r+\lambda-1}}{\underline{|\lambda}}\frac{(-x)^{s-\lambda}}{\underline{|s-\lambda}}$$

$$\sum_{0}^{m}{}_{\nu}\sum_{\nu}^{s}{}_{\lambda} \frac{h^{\nu}(k_{r-1})}{\underline{|\nu}}\frac{v^{r+\lambda-1}}{\underline{|\lambda-\nu}}\frac{(-x)^{s-\lambda}}{\underline{|s-\lambda}}$$

$$\sum_{0}^{m}{}_{\nu} \frac{h^{\nu}(k_{r-1})}{\underline{|\nu}}\, v^{\nu+1-1} \sum_{\nu}^{s}{}_{\lambda} \frac{v^{r+\lambda-1}(-x)^{s-\lambda}}{\underline{|\lambda-\nu}\;\underline{|s-\lambda}},$$

d'où

$$(26)\qquad v^r \frac{u^s}{\underline{|s}} = \sum_0^m {}_\nu \frac{h^\nu (k_{r-1})}{\underline{|\nu}} v^{r+\nu-1} \frac{u^{s-\nu}}{\underline{|s-\nu}},$$

ou, si l'on veut,

$$(26')\qquad v^r \frac{u^s}{\underline{|s}} = (b + c\,\overline{r-1})\, g_{r-1}\, v^{r-1} \frac{u^s}{\underline{|s}} + \sum_1^m {}_\nu \frac{h^\nu (k_{r-1})}{\underline{|\nu}} v^{r+\nu-1} \frac{u^{s-\nu}}{\underline{|s-\nu}}.$$

Lemme. Désignons par s un indice quelconque.

Pour toute valeur de r qui n'est pas supérieure à s, soit pour

$$r = s - \mu \quad (\mu = 0, 1, \ldots s),$$

on aura

$$k^\mu_{b+c\,\overline{s-\mu}}\, v^{s-\mu} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = \textit{nombre entier},$$

et pour toute valeur de r qui n'est pas inférieure à s, soit pour

$$r = s + \mu \quad (\mu = 0, 1, \ldots \textit{ad inf.}),$$

on aura

$$v^{s+\mu} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = \textit{nombre entier}.$$

Pour $s = 0$ et pour $s = 1$ le lemme est évident, et pour $s \geq 2$ il peut s'établir aisément par déduction de $s - 1$ à s.

En effet, supposons le lemme vrai pour l'indice $\leq s - 1$.

D'après (26'), nous aurons

$$k^\mu_{b+c\,\overline{s-\mu}}\, v^{s-\mu} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} - k^{\mu+1}_{b+c\,\overline{s-\mu-1}} \cdot g_{s-\mu-1}\, v^{s-\mu-1} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} -$$

$$- \sum_1^m {}_\nu \frac{h^\nu (k_{s-\mu-1})}{\underline{|\nu}} k^\mu_{b+c\,\overline{s-\mu}}\, v^{s-\mu+\nu-1} \frac{c^s u^{s-\nu}}{\underline{|s-\nu}} = \text{nombre entier}.$$

Par l'application itérée de cette formule, nous aurons donc

$$k^\mu_{b+c\,\overline{s-\mu}} \cdot v^{s-\mu} \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = g_{s-\mu-1}\, g_{s-\mu-2} \ldots g_0 \frac{k^s_b}{\underline{|s}} (c\,u)^s + \text{nombre entier}$$

$$= \text{nombre entier}, \quad \text{pour } \mu = 0, 1, \ldots s.$$

En particulier, nous aurons, pour $\mu = 0$,

$$v^s \frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} = \text{nombre entier}.$$

De plus, on aura d'après l'équation (26)

$$v^{s+\mu}\frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} - \sum_0^m{}_{\nu}\frac{h^\nu\,(k_{s+\mu-1})}{\underline{|\nu}}\,.\,v^{s+\mu+\nu-1}\,.\,\frac{c^s\,u^{s-\nu}}{\underline{|s-\nu}}$$

$$= h_{s+\mu-1}\,.\,v^{s+\mu-1}\frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} + \text{nombre entier}$$

$$= h_{s+\mu-1}\,.\,h_{s+\mu-2}\ldots h_s\,v^s\frac{(c\,u)^s}{\underline{|s}} + \text{nombre entier}$$

$$= \text{nombre entier.}$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant qu'il existe une relation de la forme

$$W = \sum_0^n{}_k C_k\,V(x_k) = 0.$$

On peut toujours supposer

$$x_0 \neq 0$$

Soit

$$f(x) = (c\,x)^p\frac{(x-x_0)^\lambda}{\underline{|\lambda}}\prod_1^n{}_i\,(x-x_i)^p,$$

avec les mêmes hypothèses qu'auparavant concernant les nombres p et λ (voir par exemple p. 278).

On trouve, comme auparavant,

$$0 = f(h)\sum_0^n{}_k C_k\,V(x_k) = A(x_0) + B + C,$$

où l'on aura posé, pour abréger,

$$A(x) = C_0\frac{c^p\,u^\lambda}{\underline{|\lambda}}(x+u)^p\prod_1^n{}_i\,(x-x_i+u)^p$$

$$B = \sum_1^n{}_k C_k\frac{c^p\,[x_k - x_0 + u(x_k)]^\lambda}{\underline{|\lambda}}\,[x_k + u(x_k)]^p\,u^p(x_k)\prod_1^n{}'_i\,[x_k - x_i + u(x_k)]^p$$

$$C = \sum_0^n{}_k C_k\,q(x_k)\,V(|x_k|).$$

$A(x_0)$ et B se réduiront à des nombres entiers, ce qui entraîne effectivement la conséquence que C sera de même entier.

Or, prenons p assez grand pour que

$$|C| \text{ soit } < 1:$$

donc il faut que

$$C = 0,$$

et, par suite, nous aurons encore

$$A(x_0) + B = 0.$$

Or, comme

$$B \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

il faudra enfin que

$$A(x_0) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Si l'on prend pour p un nombre premier, on doit avoir, pour $x = x_0$,

$$A(x) \equiv C_0 \frac{c^p u^\lambda}{\underline{|\lambda}} (x+u)^p \prod_1^n{}_i (x - x_i)^p \qquad (\text{mod. } p).$$

Soit p un nombre premier assez grand et supérieur à la valeur numérique de

$$C_0 b_m c x_0 \prod_1^n{}_i (x_0 - x_i).$$

On trouve alors, pour $x = x_0$,

$$\frac{(cu)^\lambda}{\underline{|\lambda}} (x+u)^p \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Supposons de plus que

$$\frac{p-1}{2} > m,$$

et soient $p-1, p-2, \ldots p-1-m$ $(m+1)$ nombres consécutifs dans l'intervalle de λ, on aura

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{\underline{|p-\varkappa}} (x+u)^p \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m+1).$$

On trouvera, plus généralement, pour $-\infty \leq \mu \leq m$ et $1 \leq \varkappa < p$,

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{\underline{|p-\varkappa}} (x+u)^{p-\mu} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \tag{27}$$

En effet, supposons d'abord que la formule (27) soit vraie pour une valeur certaine de $\varkappa$ et pour toutes les valeurs entières positives inférieures à celle-là, μ étant égal à zéro. Sa vérité pour $-\infty < \mu \leq -1$ sera alors facilement prouvée par déduction de μ à $\mu + 1$.

En effet, on aura

$$c\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{\underline{|p-\varkappa}} (x+u)^{p+\mu+1} + \frac{(cu)^{p-\varkappa+1}}{\underline{|p-\varkappa}} (x+u)^{p+\mu} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p) \quad (\mu = 0, 1, \ldots \text{ad inf.}).$$

Cela démontré, la vérité de la formule (27) pour $1 \leq \mu \leq m$ sera aussi facilement prouvée par déduction de μ à $\mu + 1$.

En effet, d'après l'identité suivante

$$(x+u)^{p-\mu-1}\left[(cu)^{\varkappa-1} - (-cx)^{\varkappa-1}\right](cu)^{p-\varkappa} = c(x+u)^{p-\mu}\sum_{2}^{\varkappa}{}_{\lambda}\,(cu)^{p-\lambda}(-cx)^{\lambda-2},$$

qui pourra être aisément vérifiée, on aura

$$(28) \qquad (-cx)^{\varkappa-1}\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{|\underline{p-\varkappa}}(x+u)^{p-\mu-1} \equiv \frac{(cu)^{\;\;-1}}{|\underline{p-\varkappa}}(x+u)^{p-\mu-1} \qquad (\text{mod. } p).$$

De plus, on aura

$$\frac{(cu)^{p-1}}{|\underline{p-1}}(x+u)^{p-\mu} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\,\frac{h^{\nu}(k_{p-\mu-1})}{|\underline{\nu}}(x+u)^{p-\mu-1+\nu}\frac{c^{p-1}u^{p-1-\nu}}{|\underline{p-1-\nu}},$$

d'où

$$h_{p-\mu-1}(x+u)^{p-\mu-1}\frac{(cu)^{p-1}}{|\underline{p-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Or, nous avons trouvé (voir p. 51)

$$h_{p-\mu-1} \equiv a_{\mu} \qquad (\text{mod. } p),$$

où tous les a_μ sont différents de zéro, pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ ad inf.

Par conséquent, si l'on prend p supérieur à la valeur numérique la plus grande des nombres $a_0\, a_1 \ldots a_m$, on aura évidemment

$$(x+u)^{p-\mu-1}\frac{(cu)^{p-1}}{|\underline{p-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où, d'après (28),

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa}}{|\underline{p-\varkappa}}(x+u)^{p-\mu-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

La formule (27) sera donc vraie pour $1 \leq \varkappa < m+1$ et pour $-\infty \leq \mu \leq m$. J'établirai, par déduction de $\varkappa$ à $\varkappa+1$, qu'elle l'est aussi pour $m+2 \leq \varkappa < p$.

Supposons en effet que ladite formule soit valable pour une certaine valeur donnée de $\varkappa \geq m+1$ et pour toutes les valeurs inférieures à celle-là.

On trouve

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa+m-1}}{|\underline{p-\varkappa+m-1}}(x+u)^{p-m+1} = \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\,\frac{h^{\nu}(k_{p-m})}{|\underline{\nu}}(x+u)^{p-m+\nu}\frac{(cu)^{p-\varkappa+m-1-\nu}c^{\nu}}{|\underline{p-\varkappa+m-1-\nu}},$$

d'où

$$c^{m}b_{m}(x+u)^{p}\frac{(cu)^{p-\varkappa-1}}{|\underline{p-\varkappa-1}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

et l'on établira, comme auparavant, que tous les

$$\frac{(cu)^{p-\varkappa-1}}{\underline{|p-\varkappa-1}}(x+u)^{p-\mu} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

$$\text{pour } -\infty < \mu \leq m.$$

Or, substituons dans l'équation (27) $\varkappa = p$, nous aurons

$$(x+u)^{p-\mu} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p), \quad \text{pour } -\infty < \mu < m.$$

Or, l'on aura

$$(x+u)^p = x^p + h_{p-1}(x+u)^{p-1},$$

d'où

$$x^p \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

ce qui est impossible.

De là résulte cette proposition:

Théorème. *V désignant la fonction définie par la formule* (18), *il ne peut exister aucune relation de la forme*

$$W = \sum_{0}^{n} {}_\lambda C_\lambda V(r_\lambda) = 0.$$

En poursuivant les recherches exposées dans ce §, j'ai réussi encore à étudier de plus près l'équation différentielle générale du 2ème degré que voici:

$$(29) \qquad c\,x\,V_2 + (b - e\,x)\,V_1 - a\,V = 0,$$

équation dont celle de M. Hurwitz est un cas spécial pour

$$e = 0$$

et dont l'équation (19) est un autre cas spécial pour

$$a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } e).$$

Mes recherches ont abouti à la proposition suivante analogue aux précédentes:

Théorème. *Soit*

$$\psi_\nu = \prod_{0}^{\nu-1}{}_\lambda (a + e\lambda), \quad \chi_\nu = \prod_{0}^{\nu-1}{}_\lambda (b + c\lambda).$$

La fonction

$$V = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\psi_\nu\, x^\nu}{\chi_\nu \underline{|\nu}} \tag{30}$$

sera donc une intégrale particulière de l'équation (29).

Il est vrai aussi pour cette fonction V *qu'il ne peut exister aucune relation de la forme*

$$W = \sum_{0}^{n}{}_{k}\, C_k\, V(x_k) = 0,$$

$a, b, c, e, x_0\, x_1 \ldots x_n$ *et* $C_0, C_1 \ldots C_n$ *étant des nombres rationnels quelconques,* $x_0\, x_1 \ldots x_n$ *étant tous différents et* $C_0\, C_1 \ldots C_n$ *n'étant pas tous égaux à zéro.*

Cette proposition représente un progrès incontestable comparée à celles que nous avons exposées dans ce qui précède. J'ai pourtant trouvé inutile de prolonger encore cet article, en en donnant ici la preuve, espérant trouver l'occasion de passer dans un article suivant à certaines études générales basées sur ces recherches.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS.

PAR

HELGE von KOCH

à STOCKHOLM.

Ce qui est peut-être le plus attrayant dans la théorie des nombres premiers, c'est le rapport profond qui existe entre ces nombres et les zéros imaginaires de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN. Ce rapport, malgré tout l'intérêt qu'il a excité depuis l'apparition du mémoire de RIEMANN, n'est encore connu que très incomplètement.

Rappelons, en quelques mots, les résultats concernant la fonction numérique $\psi(x)$ de TCHEBYCHEFF qui correspondent aux progrès faits dans l'étude de la fonction $\zeta(s)$.

D'après RIEMANN, $(s-1)\zeta(s)$ est une fonction entière possédant les zéros réels

$$-2, -4, -6, \ldots$$

et une infinité de zéros imaginaires

$$\varrho = \alpha + i\beta$$

où la partie réelle satisfait à la condition

$$\alpha < 1.$$

Tant que le signe d'égalité dans cette formule n'était pas exclu on ne pouvait pas aller plus loin que TCHEBYCHEFF. Tout ce qu'on savait c'était donc que $\frac{\psi(x)}{x}$ reste compris entre deux nombres fixes et que, si $\frac{\psi(x)}{x}$ a une limite pour $x = \infty$, cette limite est $= 1$.

Après que M. Hadamard avait démontré, en 1893, le théorème fondamental sur la décomposition de $\zeta(s)$ en facteurs primaires et dès que MM. de la Vallée Poussin et Hadamard étaient parvenus, en 1896, au résultat

$$\alpha < 1,$$

ces géomètres purent établir le fait capital

$$\lim \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

ou bien

$$\psi(x) = x + x\delta(x), \ \lim \delta(x) = 0.$$

Et quand M. de la Vallée Poussin réussit, en 1899, à trouver pour α une limite supérieure moindre que 1, savoir (pour tout zéro $\varrho = \alpha + i\beta$)

$$\alpha < 1 - \frac{A}{\log \beta} \qquad (A = \text{constante positive})$$

il parvint, dans le même travail, à une limite supérieure pour la différence $\left|\frac{\psi(x)}{x} - 1\right|$, savoir

$$|\delta(x)| < K\sqrt{\log x}\, e^{-\sqrt{A \log x}} \qquad (K = \text{constante}).$$

C'est là le résultat le plus précis sur $\psi(x)$ obtenu jusqu'à présent, si l'on ne s'appuie que sur les théorèmes rigoureusement établis relatifs à $\zeta(s)$. Or Riemann a considéré comme très probable la propriété suivante

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad (\text{pour tous les zéros } \varrho).$$

En admettant seulement

$$\alpha \leq \frac{1}{2} + c \qquad \left(0 \leq c < \frac{1}{2}\right)$$

on parviendrait, par une méthode que j'ai donnée il y a quelques années, à l'inégalité

$$|\delta(x)| < K x^{-\frac{1}{2}+c} (\log x)^2$$

qui, dans l'hypothèse $c = 0$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{2}$, se réduit à

$$|\delta(x)| < K x^{-\frac{1}{2}} (\log x)^2.$$

En somme, à chaque progrès qu'on a fait ou qu'on fera dans la recherche d'une limite supérieure pour α correspond une diminution de la limite supérieure de $|\psi(x)-x|$.

Or, quel progrès qu'on puisse faire dans cette direction, on n'arrivera jamais à une limite supérieure pour $|\psi(x)-x|$ essentiellement moindre que $Kx^{\frac{1}{2}}(\log x)^2$. En effet, M. PHRAGMÉN a démontré que l'on a

$$|\psi(x)-x| > Kx^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \qquad (K = \text{constante},\ \varepsilon > 0),$$

ε étant arbitrairement petit, pour une infinité de valeurs de x supérieures à un nombre quelconque donné.

Donc, pour arriver à une évaluation plus exacte de $\psi(x)$ il faut ajouter à x des termes complémentaires. Lesquels?

On se rappelle la formule suivante, démontrée par M. VON MANGOLDT:

$$\psi(x) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}$$

où $\psi(x)$ doit être remplacé par $\dfrac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2}$ pour un x où il y a discontinuité. C'est la formule pour $\psi(x)$ correspondante à la célèbre formule de RIEMANN, démontrée également par M. VON MANGOLDT, pour la fonction $f(x) = F(x) + \frac{1}{2}F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots$, où $F(x)$ = nombre des nombres premiers $\leq x$.

La convergence de la serie

$$\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$$

étendue à tous les zéros imaginaires ϱ de $\zeta(s)$, n'est ni absolue, ni uniforme. Quand x s'approche d'une puissance entière d'un nombre premier, la convergence devient infiniment lente et même pour d'autres valeurs de x la série converge très lentement. Il paraît que le calcul des termes correspondant à un certain nombre de zéros ϱ n'a aucune influence sensible sur la valeur cherchée et l'on pouvait être tenté d'en conclure que la détermination de tous les zéros ϱ inférieurs, en valeur absolue, à un nombre donné R n'ait qu'une influence négligeable pour l'évaluation de $\psi(x)$.

Cependant les résultats auxquels j'arrive dans le présent travail montrent qu'il y a un rapport intime entre les nombres premiers inférieurs à x et les zéros ϱ de module moindre que x. Je trouve, par exemple, que pour calculer

$\psi(x)$ avec une erreur moindre que $Kx^{1-\mu}(\log x)^2$ $(0<\mu<1,\ K=\text{constante})$ il suffit de connaître ceux des zéros ϱ où le module de la partie imaginaire est $< x^\mu$.

La démonstration de ces résultats est basée sur une nouvelle expression de $\psi(x)$ où les termes $\frac{x^\varrho}{\varrho}$ figurant dans la formule précédente se trouvent remplacés par

$$\frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right)$$

Γ désignant la fonction Gamma ordinaire et s désignant un paramètre positif.

Après avoir démontré cette formule, nous l'appliquerons d'abord à l'étude de la différence

$$|\psi(x)-x|$$

et nous retrouverons par là d'une manière rapide les résultats asymtotiques relatifs à $\psi(x)$ déjà connus et parviendrons en même temps à les compléter sur certains points.

Dans le dernier numéro nous aborderons cette question difficile à laquelle nous avons fait allusion, savoir la recherche des termes complémentaires qu'il faut ajouter à x pour représenter $\psi(x)$ avec une approximation voulue.

1. Je commence par rappeler quelques formules démontrées dans un mémoire précédent (Acta Mathematica, t. 24, p. 159).

Désignons par $\Theta(x)$ la somme des logarithmes néperiens de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x et définissons, avec Tchebycheff, la fonction $\psi(x)$ par l'égalité

$$\psi(x)=\Theta(x)+\Theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\Theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right)+\cdots$$

Mettons

$$(1)\qquad \Psi(x,s)=\Sigma\left(1-e^{-\left(\frac{x}{p}\right)^s}\right)\log p+\Sigma\left(1-e^{-\left(\frac{x}{p^2}\right)^s}\right)\log p+\cdots$$

où les sommes s'étendent à tous les nombres premiers

$$p=2,3,5,7,11,\ldots$$

Ici, et dans tout ce qui suit, x et s désignent des nombres réels positifs et $s>1$. La série définissant $\Psi(x,s)$ converge absolument et aussi uniformément par rapport à x dans chaque intervalle fini et par rapport à s dans l'intervalle

$$\mathrm{I} + \varepsilon \leq s \leq + \infty$$

ε étant positif et arbitrairement petit:

Introduisant la fonction

$$P(x, s, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathrm{I}}{\nu s + \alpha} \frac{(-\mathrm{I})^{\nu-1}}{\lfloor \nu} x^{\nu s}$$

on obtient pour $\Psi(x, s)$ la représentation suivante:

$$\Psi(x, s) = (\mathrm{I} - \log 2\pi)(\mathrm{I} - e^{-x^s}) + P(x, s, -\mathrm{I}) \tag{2}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left[P(x, s, 2n) - \frac{\mathrm{I}}{2n}(\mathrm{I} - e^{-x^s}) \right]$$

$$- \sum_{\varrho} \left[P(x, s, -\varrho) + \frac{\mathrm{I}}{\varrho}(\mathrm{I} - e^{-x^s}) \right]$$

la dernière somme s'étendant à tous les zéros imaginaires ϱ de la fonction $\zeta(s)$. Les deux séries figurant dans (2) convergent absolument et uniformément par rapport à x dans tout intervalle fini.

Enfin, pour la fonction $P(x, s, \alpha)$ on a les formules suivantes

$$P(x, s, \alpha) = x^{-\alpha} \int_0^x y^{\alpha-1}(\mathrm{I} - e^{-y^s})\, dy \tag{3}$$

$$P(x, s, \alpha) = \frac{\mathrm{I}}{\alpha}(\mathrm{I} - e^{-x^s}) - \frac{x^{-\alpha}}{\alpha} \int_0^x s y^{\alpha+s-1} e^{-y^s} dy \tag{4}$$

$$P(x, s, \alpha) = \frac{\mathrm{I}}{\alpha}(\mathrm{I} - e^{-x^s}) - \frac{s x^s e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)} \tag{5}$$

$$- \frac{s^2}{\alpha(s+\alpha)} \cdot x^{-\alpha} \int_0^x y^{\alpha+2s-1} e^{-y^s} dy.$$

2. Nous allons transformer les différents termes de la formule (2).

Pour $P(x, s, -\mathrm{I})$ on trouve facilement,[1] par l'application de la formule (3):

$$P(x, s, -\mathrm{I}) = x - \mathrm{I} + \delta$$

avec

[1] loc. cit. p. 172.

$$|\delta| < K \cdot \frac{x}{s}$$

ce que nous écrivons

$$P(x, s, -1) = x - 1 + \left\{\frac{x}{s}\right\} \tag{6}$$

en convenant de donner généralement au symbole $\{f(x, s)\}$ le sens suivant: $f(x, s)$ étant une fonction positive donnée, $\{f(x, s)\}$ est une fonction qui, pour des valeurs de x, s supérieures respectivement à certaines valeurs fixes x_0, s_0, reste inférieure, en valeur absolue, à $K . f(x, s)$, K étant une constante (indépendante de x et de s).[1]

Pour évaluer un terme de la forme

$$-\left[P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n}(1 - e^{-x^s})\right]$$

nous employons la formule (4) qui exprime ce terme par l'intégrale

$$\int_0^x \frac{s}{2n}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n} y^{s-1} e^{-y^s} dy.$$

Posons, pour un instant,

$$f(y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n};$$

écrivons l'intégrale sous la forme

$$\int_0^x s y^{s-1} e^{-y^s} f(y)\, dy = \int_0^{1-h} + \int_{1-h}^{1+h} + \int_{1+h}^{x}$$

h étant un nombre positif < 1. Dans la première des intégrales à droite on a

$$0 < y \leq 1 - h, \quad e^{-y^s} < 1,$$

d'où

$$\int_0^{1-h} < \frac{1}{x^{2n}} \int_0^{1-h} s y^{s+2n-1} dy = \frac{s}{s+2n}\left(\frac{1-h}{x}\right)^{2n} (1-h)^s;$$

[1] Dans tout ce qui suit, K conserve cette signification mais pourra différer de l'une formule à l'autre.

dans la troisième:

$$1 + h \leqq y \leqq x\,, \quad y^s e^{-y^s} < (1 + h)^s e^{-(1+h)^s}$$

d'où:

$$\int_{1+h}^{x} < s(1 + h)^s e^{-(1+h)^s} \cdot \frac{1}{(2n)^2};$$

dans la seconde on a

$$1 - h \leqq y \leqq 1 + h\,, \quad f(y) = f(1) + (y - 1) f'(\eta)$$

$$1 - h < \eta < 1 + h\,, \quad |y - 1| < 2h\,, \quad f'(\eta) = \frac{\eta^{2n-1}}{x^{2n}}$$

et comme

$$\int_{1-h}^{1+h} s y^{s-1} e^{-y^s} dy = e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}$$

il vient

$$\int_{1-h}^{1+h} = \frac{1}{2n}\,\frac{1}{x^{2n}} + \delta$$

où

$$|\delta| < \frac{1}{2n}\,\frac{1}{x^{2n}}\left(1 - e^{-(1-h)^s} + e^{-(1+h)^s}\right)$$

$$+ \frac{2h(1 + h)^{2n-1}}{x^{2n}}\left(e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}\right).$$

Remarquant que

$$1 - e^{-(1-h)^s} < (1 - h)^s < \frac{1}{(1 + h)^s}$$

$$e^{-(1+h)^s} < \frac{1}{(1 + h)^s}$$

$$(1 + h)^s e^{-(1+h)^s} < \frac{6}{(1 + h)^{2s}}$$

et combinant les formules précédentes, il vient

$$-\left[P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n}\left(1 - e^{-x^s}\right)\right] = \frac{1}{2n}\,\frac{1}{x^{2n}} \quad \delta_n$$

où

$$|\delta_n| < \frac{6s}{(\text{I}+h)^{2s}} \cdot \frac{\text{I}}{(2n)^2} + \frac{3}{(\text{I}+h)^s} \frac{\text{I}}{x^{2n}}$$
$$+ 2h\left(\frac{\text{I}+h}{x}\right)^{2n}.$$

Disposons enfin de h en prenant

$$h = \frac{\log s}{s}$$

et remarquons qu'on a alors

$$(\text{I}+h)^s = s(\text{I}+\varepsilon)$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{\text{I}}{s}$; nous obtenons

$$|\delta_n| < A \cdot \frac{\log s}{s}\left(\frac{\text{I}}{(2n)^2} + \left(\frac{\text{I}+h}{x}\right)^{2n}\right)$$

A étant indépendant de x, s, n.

Pour $s > \text{I}$ on a $h < \text{I}$ ce qui montre que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n|$ converge pour $x \geq 2$ et reste inférieur à $\frac{\log s}{s}$ multiplié par une constante. Nous obtenons donc finalement en remplaçant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{I}}{2n} \frac{\text{I}}{x^{2n}}$$

par sa valeur $-\frac{\text{I}}{2} \log\left(\text{I} - \frac{\text{I}}{x^2}\right)$:

$$(7) \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} \left[P(x, s, 2n) - \frac{\text{I}}{2n}(\text{I} - e^{-x^s})\right] = -\frac{\text{I}}{2} \log\left(\text{I} - \frac{\text{I}}{x^n}\right) + \left\{\frac{\log s}{s}\right\}.$$

Pour transformer les termes suivants qui dépendent des zéros ϱ, nous employons la formule (5) et obtenons

$$P(x, s, -\varrho) + \frac{\text{I}}{\varrho}(\text{I} - e^{-x^s}) = \frac{s x^s e^{-x^s}}{\varrho(s-\varrho)} + \frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)} \int_0^x s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy$$

$$= \frac{s x^s e^{-x^s}}{\varrho(s-\varrho)} - \frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)} \int_x^{\infty} s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy + \frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)} \int_0^{\infty} s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy.$$

Dans la dernière de ces intégrales nous prenons

$$t = y^s$$

comme variable d'intégration ce qui donne

$$\int_0^\infty s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy = \int_0^\infty t^{\frac{s-\varrho}{s}} e^{-t} dt$$

$$= \frac{s-\varrho}{s} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)$$

Γ ayant sa signification habituelle.

Pour évaluer l'intégrale

$$\int_x^\infty s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy$$

nous rappelons que la partie réelle α de ϱ est comprise entre 0 et 1: on a donc (pour $x > 1$)

$$\left| \int_x^\infty s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy \right| < \int_x^\infty s y^{2s-1} e^{-y^s} dy$$

$$= e^{-x^s}(1 + x^s).$$

Par là et en remarquant que (pour $s \geqq 2$)

$$|s - \varrho| \geqq |\varrho|$$

et que $|x^\varrho| \leqq x$ nous obtenons donc

$$P(x, s, -\varrho) + \frac{1}{\varrho}(1 - e^{-x^s}) = \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) + \delta(x, s, \varrho)$$

où

$$|\delta(x, s, \varrho)| < s x e^{-x^s} \cdot \frac{K}{|\varrho|^2}$$

K étant indépendant de x, s, ϱ.

Faisons la somme par rapport à ϱ, nous aurons[1]

---

[1] D'après un théorème fondamental de M. Hadamard (Journal de Mathématiques, 1893) la série $\Sigma_\varrho \frac{1}{|\varrho|^\nu}$ converge déjà pour $\nu > 1$.

$$\sum_{\varrho} \left[P(x, s, -\varrho) + \frac{1}{\varrho}\left(1 - e^{-x^s}\right) \right] = \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho}\, \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) + \{s x^{s+1} e^{-x^s}\} \tag{8}$$

le dernier terme tendant avec grande rapidité vers zéro quand x ou s augmente.

Dans ce qui suit, il nous suffit de savoir que ce terme satisfait à l'inégalité

$$\left|\{s x^{s+1} e^{-x^s}\}\right| < \left\{\frac{1}{s}\right\} < \frac{K}{s}$$

K étant une constante.

Combinant les formules (2), (6), (7), (8) il vient

$$\begin{aligned} \Psi(x, s) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho}\, \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) + \left\{\frac{x + \log s}{s}\right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Le dernier terme est ici, comme on voit, inférieur à une constante dès que l'on prend $s \geqq x$.

3. D'autre part la fonction $\Psi(x, s)$ peut s'exprimer sous la forme suivante[1]

$$\Psi(x, s) = \int_0^x s\, \psi\left(\frac{x}{y}\right) y^{s-1} e^{-y^s} dy. \tag{10}$$

Soit h un nombre positif < 1 et écrivons cette intégrale sous la forme

$$\int_0^x = \int_0^{1-h} + \int_{1-h}^{1+h} + \int_{1+h}^x \tag{11}$$

On a toujours, d'après un lemme de M. Mertens[2]

$$\psi(x) < 2x;$$

il vient donc

[1] Voir p. 485 de mon article: Sur un théorème concernant les nombres premiers. Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. 1. Stockholm 1904.

[2] Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78.

$$(12) \qquad \int_0^{1-h} < 2x \int_0^{1-h} sy^{s-2}\, e^{-y^s} dy < 2x \int_0^{1-h} sy^{s-2} dy$$

$$2x \cdot \frac{s}{s-1}(1-h)^{s-1}$$

et

$$\int_{1+h}^{x} < 2x \int_{1+h}^{x} sy^{s-2}\, e^{-y^s} dy < 4x \int_{1+h}^{x} sy^{-s-2} dy$$

$$(13) \qquad < 4x \cdot \frac{s}{s+1}\, \frac{1}{(1+h)^{s+1}}.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_{1-h}^{1+h}$ nous désignons par $\overline{\psi}(x)$ une fonction ainsi définie: quand x n'est pas égal à la puissance p^λ d'un nombre premier p, on a $\overline{\psi}(x) = \psi(x)$; quand au contraire $x = p^\lambda$, $\overline{\psi}(x)$ désigne une valeur indéterminée entre les limites

$$\psi(x-0) \text{ et } \psi(x+0) = \psi(x)$$

ce qu'on peut écrire

$$\overline{\psi}(x) = \psi(x) - t \log x$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

D'après cette définition, il est clair que toute valeur comprise entre les limites

$$\psi\left(\frac{x}{1+h}\right) \text{ et } \psi\left(\frac{x}{1-h}\right)$$

peut s'écrire sous la forme $\overline{\psi}(\xi)$, ξ étant compris entre les limites

$$\frac{x}{1+h} \text{ et } \frac{x}{1-h}.$$

On a donc, d'après le théorème de la moyenne,

$$(14) \qquad \int_{1-h}^{1+h} = \overline{\psi}(\xi) \int_{1-h}^{1+h} sy^{s-1}\, e^{-y^s} dy$$

$$= \overline{\psi}(\xi)\left(e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}\right)$$

$$\psi(\xi) + \delta$$

où

$$|\delta| < \overline{\psi}(\xi)\left(1 - e^{-(1-h)^s} + e^{-(1+h)^s}\right)$$

$$< \frac{2x}{1-h}\left((1-h)^s + \frac{1}{(1+h)^s}\right)$$

$$< \frac{4x}{1-h} \cdot \frac{1}{(1+h)^s}.$$

Le nombre ξ qui figure dans cette formule jouit d'une propriété importante dans la suite: quand x augmente d'une manière continue ξ augmente aussi d'une manière continue ou reste stationnaire et pour $x = \infty$ on a $\xi = \infty$.

C'est ce qu'on voit en remarquant que, pour toute valeur donnée de y, $\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ va en augmentant avec x $\left(\text{ou reste stationnaire jusqu'à ce que } \frac{x}{y} \text{ passe par une valeur } p^\lambda \text{ où } p = \text{nombre premier et } \lambda = \text{nombre positif entier}\right)$ et que, par suite, l'intégrale

$$\int_{1-h}^{1+h} s\,\psi\left(\frac{x}{y}\right) y^{s-1} e^{-y^s}\, dy$$

laugmente avec x (ou reste stationnaire) et finit par dépasser une limite donnée quelconque; d'après l'égalité (14) il en est donc de même de $\psi(\xi)$ ce qui, vu la définition de ψ, amène la propriété énoncée de ξ.

Disposons enfin de h en prenant

$$h = \frac{\log s}{s}$$

et combinons les formules (10)—(14); nous aurons, après un petit calcul analogue à celui du n° 2,

$$\Psi(x, s) = \overline{\psi}(\xi) + \left\{\frac{x}{s}\right\} \tag{15}$$

$$\frac{x}{1+h} < \xi < \frac{x}{1-h}.$$

La comparaison des formules (9) et (15) donne

$$\psi(\xi) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) \tag{16}$$

$$+ t \log x + \left\{\frac{x + \log s}{s}\right\}$$

$$\frac{x}{1 + h} < \xi < \frac{x}{1 - h} \qquad \left(h = \frac{\log s}{s}\right)$$

$$0 < t \leq 1.$$

4. En remarquant que

$$|x - \xi| < \frac{2hx}{1 - h^2}, \ \frac{x}{\xi} < 1 + h, \ h = \frac{\log s}{s}$$

on obtient de la formule (16) l'inégalité suivante

$$(17) \qquad \left|\frac{\psi(\xi) - \xi}{\xi}\right| < (1 + h) \sum_\varrho \left|\frac{x^{\varrho - 1}}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)\right| + \left\{\frac{\log x}{x} + \frac{\log s}{s}\right\}$$

et on voit donc que l'évaluation de l'ordre de grandeur de la différence

$$\psi(\xi) - \xi$$

se ramène à celle de la série figurant au second membre de cette inégalité.

Posant

$$\varrho = \alpha + i\beta$$

nous savons que α est compris entre 0 et 1 ce qui nous permet d'appliquer à l'expression $\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)$ une formule de M. Pincherle concernant la fonction Γ.[1] Nous obtenons (pour $s > 1$)

$$\left|\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)\right| < K \,.\, \left|1 - \frac{\varrho}{s}\right|^{1 - \frac{\alpha}{s} - \frac{1}{2}} . \, e^{-\frac{\pi}{2}\left|\frac{\beta}{s}\right|}$$

K étant indépendant de ϱ et de s, et de là, *a fortiori*,

$$(18) \qquad \left|\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)\right| < K \,.\, e^{-k\left|\frac{\beta}{s}\right|}$$

où $k = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et ε un nombre positif arbitrairement petit.

[1] Rendiconti d. R. Acc. d. Lincei. Bd 4, p. 694. 1888. (Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, § 38; Leipzig, Teubner, 1906).

Comme

$$|x^\varrho| = x^\alpha, \quad \left|\frac{1}{\varrho}\right| < \frac{K_1}{|\beta|}$$

où K_1 est une constante, nous obtenons donc, d'après (18):

$$(19) \qquad \left|\frac{\psi(\xi)-\xi}{\xi}\right| < K \sum_{\beta>0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}} + \left\{\frac{\log x}{x} + \frac{\log s}{s}\right\}$$

la sommation pouvant ici être bornée à tous les zéros $\varrho = \alpha + i\beta$ où $\beta > 0$ (puisque les ϱ sont conjuguées deux à deux).

5. Voyons d'abord à quelle conséquence conduit cette formule si nous nous appuyons sur l'inégalité fondamentale

$$(20) \qquad \alpha < 1$$

démontrée par M. Hadamard[1] et par M. de la Vallé Poussin.[2]

Donnons à s une valeur fixe quelconque > 1 et faisons tendre x vers l'infini. Comme

$$x^{\alpha-1} < 1$$

et que la série à termes constants

$$\sum_{\beta>0} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}}$$

est convergente on obtient la valeur limite de la série

$$\sum_{\beta>0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}}$$

pour $x=\infty$ en y mettant $x=\infty$ dans chacun des termes, ce qui, en vertu de (20), montre que cette limite est égale à zéro. D'après les propriétés de ξ démontrées plus haut, nous obtenons donc

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\psi(\xi)-\xi}{\xi} = \left\{\frac{\log s}{s}\right\}.$$

Or s pouvant être choisi aussi grand qu'on le veut, il en résulte

[1] Bull. de la Soc. Math. de France, 1896.

[2] Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles, 1896.

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\psi(\xi)-\xi}{\xi} = 0.$$

On sait que ce résultat fondamental qui a coûté de très grands efforts est dû à MM. HADAMARD et DE LA VALLÉE POUSSIN qui l'ont démontré presque simultanément et indépendamment l'un de l'autre. Leurs démonstrations sont basées sur les propriétés de $\zeta(s)$, trouvées auparavant par M. HADAMARD dans son mémoire célèbre de 1893 et sur les propriétés de certaines intégrales entre des limites imaginaires analogues au facteur de discontinuité de DIRICHLET.[1]

La démonstration que nous avons trouvé plus haut est basée aussi sur les théorèmes de M. HADAMARD relatifs à la fonction $\zeta(s)$ mais n'exige, pour le reste, que la connaissance des principes les plus élémentaires du calcul intégral.

6. On doit à M. de la VALLÉE POUSSIN[2] d'avoir trouvé, pour la première fois, une limite inférieure > 0 pour la différence $1-\alpha$. D'après le théorème de ce géomètre on a, entre les parties réelles et imaginaires d'une racine $\varrho = \alpha + i\beta$ de $\zeta(s)$ la formule

$$1-\alpha > \frac{p}{\log\beta - \log n} \tag{21}$$

$$(p = 0{,}03466\ldots^{3},\ n = 47{,}886\ldots)$$

pour $\beta \geq 705$ et

$$1-\alpha > 0{,}0128$$

pour $0 < \beta < 705$.

Pour appliquer ce résultat à nos formules, partageons la somme par rapport à β en deux parties de la manière suivante:

$$\sum_{\beta>0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}} = \sum_{705>\beta>0} + \sum_{\beta\geq 705} \tag{22}$$

et occupons nous d'abord de la deuxième somme qui est étendue à tous les ϱ où $\beta \geq 705$.

[1] M. LANDAU a donné (Mathem. Annalen Bd 56) une démonstration du même théorème qui ne suppose connues que les propriétés les plus élémentaires de la fonction $\zeta(s)$ (en particulier, on ne s'appuie pas sur les théorèmes de M. HADAMARD). Cette démonstration opère aussi avec des intégrales entre des limites imaginaires. Tout récemment, M. LANDAU a simplifié notablement cette démonstration (Sitzungsberichte d. K. Preuss. Ak. d. Wiss. t. 36, p. 746; Berlin 1908).

[2] Mém. couronnés et autres mém. publiés par l'Académie royale de Belgique, t. 59; 1899

[3] M. LANDAU vient de remplacer ce nombre par une valeur un peu plus grande, savoir $p = 0{,}0376\ldots$ Voir Rendiconti del Circolo math. di Palermo, t. 26, p. 250. (1908).

De la formule (21) résulte, d'après M. de la VALLÉE POUSSIN[1]

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\beta} < K e^{-2\sqrt{p \log x}}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{\beta \geq 705} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}} < K e^{-2\sqrt{p \log x}} \sum_{\beta \geq 705} e^{-\frac{k\beta}{s}} .$$

et nous sommes ainsi conduit à chercher une expression de la série

$$\sum_{\beta \geq 705} e^{-\frac{k\beta}{s}} . \tag{23}$$

D'après un théorème de M. VON MANGOLDT,[2] on peut exprimer le nombre des zéros $\varrho = \alpha + i\beta$ où $0 < \beta \leq T$ par la formule

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \{\log T\} . \tag{24}$$

Il en résulte que le nombre des zéros où β est compris entre deux entiers successifs m et $m+1$ est inférieur à

$$K \log m$$

K étant une constante positive.[3] On a donc pour la partie correspondante de la somme (23)

$$\sum_{m < \beta < m+1} e^{-\frac{k\beta}{s}} < K \log m \, . \, e^{-\frac{km}{s}}$$

d'où

$$\sum_{\beta > B} e^{-\frac{k\beta}{s}} < K \sum_{m=B}^{\infty} \log m \, . \, e^{-\frac{km}{s}}$$

B étant un entier positif quelconque.

La fonction

$$\log y \, . \, e^{-\frac{ky}{s}}$$

est croissante quand y varie de 1 à la valeur y_0 définie par l'égalité

[1] n:o 35 du mém. cité p. 307.

[2] Mathematische Annalen, Bd 60; 1905.

[3] Dans les formules qui suivent, K désigne toujours une constante mais peut différer de l'une formule à l'autre.

$$y_0 \log y_0 = \frac{s}{k}$$

et puis décroissante quand y varie de y_0 jusqu'à l'infini.

Choisissons un nombre k_1 entre 1 et k et désignons par y_1 le nombre satisfaisant à l'égalité

$$y_1 \log y_1 = \frac{s}{k_1}.$$

La fonction $\log y \,.\, e^{-\frac{k_1 y}{s}}$ ayant son maximum pour $y = y_1$ on pourra écrire

$$\sum_{m=B}^{\infty} \log m \,.\, e^{-\frac{km}{s}} = \sum_{m=B}^{\infty} \log m \,.\, e^{-\frac{k_1 m}{s}} \,.\, e^{-\frac{k-k_1}{s} m}$$

$$< \log y_1 \,.\, e^{-\frac{k_1 y_1}{s}} \sum_{m=B}^{\infty} e^{-\frac{k-k_1}{s} m}$$

$$< \log y_1 \, e^{-\frac{k_1 y_1}{s}} \left(e^{-\frac{k-k_1 B}{s}} + \int_B^{\infty} e^{-\frac{k-k_1}{s} y} dy \right)$$

$$= \log y_1 \, e^{-\frac{k_1 y_1}{s}} \left(e^{-\frac{k-k_1 B}{s}} + \frac{s}{k-k_1} e^{-\frac{k-k_1}{s} B} \right)$$

$$= \log y_1 \,.\, e^{-\frac{kB}{s}} \left(1 + \frac{s}{k-k_1} \right)$$

d'où en remarquant que $y_1 < s$ $\left(\text{pour } s > e^{\frac{1}{k_1}}\right)$:

$$\sum_{\beta > B} e^{-\frac{k_1 \beta}{s}} < K_1 s \log s \qquad (K_1 = \text{constante}). \tag{25}$$

Comme d'autre part

$$\sum_{705 > \beta > 0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k_1 \beta}{s}} < \frac{K}{x^{0,012}} \tag{26}$$

nous obtenons enfin, en combinant (22), (25), (26) :

$$\sum_{\beta > 0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k_1 \beta}{s}} < K e^{-2\sqrt{p \log x}} \,.\, s \log s \tag{27}$$

et, d'après (19),

$$\left|\frac{\psi(\xi)-\xi}{\xi}\right| < K\,e^{-2\sqrt{p\log x}}\,.\,s\log s + \left\{\frac{\log x}{x} + \frac{\log s}{s}\right\}$$

d'où

$$\frac{\psi(x)-x}{x} = \left\{e^{-2\sqrt{p\log x}}\,.\,s\log s + \frac{\log x}{x} + \frac{\log s}{s}\right\}. \tag{28}$$

Dans cette formule il suffit de prendre

$$s = e^{\sqrt{p\log x}}$$

pour obtenir la formule suivante

$$\frac{\psi(x)-x}{x} = \left\{\sqrt{p\log x}\,.\,e^{-\sqrt{p\log x}}\right\} \tag{29}$$

qui n'est autre que celle de M. DE LA VALLÉE POUSSIN.[1]

De là on obtient facilement, en s'appuyant sur la relation connue entre $\psi(x)$ et la fonction $F(x)$ qui exprime le nombre des nombres premiers ne dépassant pas x, une formule correspondante pour la différence entre $F(x)$ et le logarithme intégral $Li(x)$:

$$F(x) - Li(x) = \left\{\frac{x}{\log x}\sqrt{p\log x}\,.\,e^{-\sqrt{p\log x}}\right\}.$$

C'est le célèbre théorème de M. DE LA VALLÉE POUSSIN,[2] qui comme on sait, constitue le résultat asymptotique le plus précis obtenu jusqu'à présent concernant $F(x)$, si l'on fait abstraction des résultats basés sur le théorème hypothétique $R\varrho = \frac{1}{2}$.

7. D'après la formule (4) nous pouvons, dans la formule (2), remplacer le terme $P(x, s, -1)$ par l'expression suivante

$$(1 - e^{-x^s}) + \int_0^x s\frac{x}{y}\,y^{s-1}e^{-y^s}\,dy$$

ce qui nous donne

$$P(x,s) = \log x - x\,.\,(1 - e^{-x^s}) - \int_0^x s\frac{x}{y}\,y^{s-1}e^{-y^s}\,dy$$

[1] Mém. cité, n:o 55.

[2] Mém. cité, n:o 67.

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[P(x,\ s,\ 2\,n)-\frac{1}{2\,n}\left(1-e^{-x^s}\right)\right]$$

$$-\sum_{\varrho}\left[P(x,\ s,\ -\varrho)+\frac{1}{\varrho}\left(1-e^{-x^s}\right)\right].$$

Comparant cette expression de $\Psi(x,\ s)$ avec celle fournie par la formule (10) il vient

$$s\int_0^x\left(\psi\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\right)y^{s-1}e^{-y^s}dy=-\log 2\,\pi\,.\,\left(1-e^{-x^s}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}-\sum_{\varrho}$$

les signes $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ et $\sum\limits_{\varrho}$ désignant, pour abréger, les mêmes sommes que dans la formule précédente.

Nous savons (n° 2) que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ reste inférieure à une constante en valeur absolue; donc, si nous posons, pour abréger

$$\sum_{\varrho}\left|\frac{x^{\varrho}}{\varrho}\,\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right)\right|=S$$

il vient

(30) $$s\int_0^x\left(\psi\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\right)y^{s-1}\,e^{-y^s}\,dy=\{\,S\,\}.$$

Désignons maintenant par $\omega(x)$ une fonction positive de la variable positive x remplissant les conditions suivantes: à partir d'une certaine valeur $x=x_0>1$ la fonction $\omega(x)$ est toujours décroissante et la fonction $x\omega(x)$ toujours croissante et l'on a

(31) $$|\,\psi(x)-x\,|<x\,\omega(x).$$

Il existe effectivement de telles fonctions, par exemple

$$\omega(x)=K\sqrt{p\log x}\,.\,e^{-\sqrt{p\log x}}$$

(K = constante convenablement choisie).

Écrivons le premier membre de (30) sous la forme

$$s\int_0^x=s\int_0^{1-h}+s\int_{1-h}^{1+h}+s\int_{1+h}^{\frac{x}{x_0}}+s\int_{\frac{x}{x_0}}^{x},$$

h étant un nombre positif $<\frac{x}{x_0}$ dont nous allons disposer.

On a alors, du moins pour $x > x_0$, $s \geqq 2$

$$s \left| \int_0^{1-h} \right| < \int_0^{1-h} s \frac{x}{y} \omega\left(\frac{x}{y}\right) y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

$$< x\omega\left(\frac{x}{1-h}\right) \int_0^{1-h} s y^{s-2} dy$$

$$= x\omega\left(\frac{x}{1-h}\right) \frac{s}{s-1} (1-h)^{s-1}$$

$$< 2x\omega(x)\ (1-h)^{s-1}$$

$$s \left| \int_{1+h}^{\frac{x}{x_0}} \right| < x\omega(x) \int_{1+h}^{\frac{x}{x_0}} s y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

$$< x\omega(x) e^{-(1+h)^s}$$

$$< \frac{x\omega(x)}{(1+h)^s}$$

$$s \left| \int_{\frac{x}{x_0}}^{x} \right| < K \cdot \int_{\frac{x}{x_0}}^{x} s y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

$$< K e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^s} < K$$

$$(K = \text{constante})$$

et, x_1 désignant une certaine valeur comprise entre les limites

$$\frac{x}{1+h} \text{ et } \frac{x}{1-h}$$

et ψ conservant la même signification que plus haut (n° 3):

$$s \int_{1-h}^{1+h} = (\psi(x_1) - x_1) \int_{1-h}^{1+h} s y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

$$= (\psi(x_1) - x_1)\left(e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}\right)$$

$$= \psi(x_1) - x_1 + \delta$$

où

$$|\delta| < |\bar{\psi}(x_1) - x_1|(1 - e^{-(1-h)^s} + e^{-(1+h)^s})$$

$$< |\bar{\psi}(x_1) - x_1| \cdot \frac{2}{(1+h)^s} < \frac{2\, x_1\, \omega(x_1)}{(1+h)^s}$$

$$< 2\frac{x}{1-h}\,\omega\left(\frac{x}{1-h}\right) \cdot \frac{2}{(1+h)^s}$$

$$< \frac{2\, x\, \omega(x)}{(1-h)(1+h)^s}.$$

La combinaison de toutes ces formules conduit à la suivante:

(32) $$\psi(x_1) - x_1 = \left\{ S + \frac{x\,\omega(x)}{(1+h)^s} \right\}$$

valable, nous le répétons, pour une certaine valeur x_1 entre $\frac{x}{1+h}$ et $\frac{x}{1-h}$.

Combinons d'abord cette formule avec le théorème asymtotique (29) de M. DE LA VALLÉE POUSSIN. Cela revient à mettre

$$\omega(x) = K\sqrt{p \log x}\, e^{-\sqrt{p \log x}}$$

et à se rappeler que, d'après nº 6, on a

$$S < K s \log s \,.\, x e^{-2\sqrt{p \log x}}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\psi(x_1) - x_1 = \left\{ s \log s \,.\, x e^{-2\sqrt{p \log x}} + x\sqrt{p \log x} \cdot \frac{e^{-\sqrt{p \log x}}}{(1+h)^s} \right\}.$$

Laissons h fixe et disposons de s de telle manière que

$$(1+h)^s = e^{\sqrt{p \log x}}$$

c'est-à-dire

$$s \log(1+h) = \sqrt{p \log x};$$

nous aurons

$$\psi(x_1) - x_1 = \frac{1}{h}\{x \log(\log x) \,.\, \sqrt{p \log x} \,.\, e^{-2\sqrt{p \log x}}\}$$

d'où

(33) $$|\psi(x_1) - x_1| < \frac{C}{h} \cdot x_1 \log(\log x_1) \sqrt{p \log x_1}\, e^{-2\sqrt{p \log x_1}}$$

C étant une constante numérique.

Remplaçant x par $x(1+h)$ et désignant $\frac{1+h}{1-h}$ par $1+H$, ce résultat peut s'énoncer ainsi:

Désignant par H_0 une constante positive < 1 et par H un nombre arbitrairement petit (dépendant ou non de x) de l'intervalle $0 \dots H_0$, il y aura dans chaque intervalle

$$x \dots x(1 + H),$$

du moins à partir d'une valeur suffisamment grande de x, une valeur x_1 au moins pour laquelle on ait

$$(34) \qquad |\psi(x_1) - x_1| < \frac{C}{H} \cdot x_1 \log(\log x_1) \,.\, \sqrt{p \log x_1}\, e^{-2\sqrt{p \log x_1}}$$

C étant une constante (indépendante de x, x_1, H).

Donnons, par exemple, des valeurs fixes à x et à H et marquons sur l'axe des x la suite de points

$$x,\ x(1 + H),\ x(1 + H)^2,\ x(1 + H)^3, \dots$$

Cet axe sera par là partagé en intervalles tels que, pour chacun d'eux la différence $|\psi(x) - x|$ devient une fois au moins, inférieure à la fonction

$$Kx \log(\log x) \sqrt{\log x}\, e^{-2\sqrt{p \log x}}$$

qui, comme on voit, est d'un ordre inférieur à celui indiqué par la formule (29). Pour ces points, au moins, l'approximation obtenue en prenant

$$\psi(x) = x$$

est donc meilleure que l'on pouvait l'affirmer d'après le théorème asymtotique de M. DE LA VALLÉE POUSSIN.

Voyons, en second lieu, à quelle conséquence amène la formule (32) en admettant que tous les zéros de $\zeta(s)$ satisfassent à l'égalité hypothétique de RIEMANN:

$$R\varrho = \frac{1}{2} \cdot$$

J'ai montré (Acta mathem. t. 24) que l'on obtient dans ce cas

$$S < Kx^{\frac{1}{2}} (\log s)^2, \quad |\psi(x) - x| < Kx^{\frac{1}{2}} (\log x)^2 \qquad (K = \text{constante}).$$

Mettons donc

$$\omega(x) = K \frac{(\log x)^2}{x^{\frac{1}{2}}};$$

on s'assure aisément que $\omega(x)$ est décroissante et $x\omega(x)$ croissante à partir d'une certaine valeur x_0 (on peut mettre $x_0 = e^4$).

L'application de la formule (32) donne

$$\psi(x_1) - x_1 = x^{\frac{1}{2}} \left\{ (\log s)^2 + \frac{(\log x)^2}{(1+h)^s} \right\}$$

où

$$x > x_0, \quad s \geq 2, \quad 0 \leq h \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{1+h} < x_1 < \frac{x}{1-h},$$

donc, si l'on donne à h une valeur fixe comprise dans l'intervalle $0 \ldots \frac{1}{2}$ et que l'on choisit s tel que

$$(1+h)^s = (\log x)^2$$

il vient, après un petit calcul,

$$\psi(x_1) - x_1 = \{x_1^{\frac{1}{2}} [\log \log (\log x_1)]^2\}$$

x_1 étant une certaine valeur de l'intervalle

$$\frac{x}{1+h} \cdots \frac{x}{1-h},$$

et x une valeur quelconque $> x_0$.

8. Au § 4 de notre mémoire cité plus haut (Acta math. t. 24) nous avons calculé une limite supérieure pour la différence $\Psi(x, s) - \psi(x)$. Pour l'objet que nous avons en vue il faut reprendre ce calcul pour diminuer autant que possible la limite en question.

$\Psi(x, s)$ étant definie par l'égalité (1), on peut poser

$$\Psi(x, s) = \psi(x) - \psi_1(x, s) + \psi_2(x, s) \tag{35}$$

où

$$\psi_1(x, s) = \sum_{p^\lambda \leq x} e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s} \log p$$

est une somme étendue à toutes les puissances de nombres premiers $p^\lambda \leq x$ et où

$$\psi_2(x, s) = \sum_{p^\lambda > x} \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s}\right) \log p,$$

la somme s'étendant à toutes les puissances $p^\lambda > x$

Pour préciser, nous supposons $x = n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre positif entier, et $s \geq 2$.

Pour $p^\lambda \leq x$ on a alors

$$p^\lambda \leq x - \frac{1}{2}$$

et

$$e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)} < \left(\frac{p^\lambda}{x}\right)^s$$

d'où

$$\psi_1(x, s) < \frac{1}{x^s} \sum_{p^\lambda < x} p^{\lambda s} \log p$$

$$< \frac{1}{x^s} \sum_{\nu=2}^{n} \nu^s \log \nu$$

$$< \frac{1}{x^s} \int_2^n x^s \log x dx + \left(\frac{n}{x}\right)^s \log n$$

$$= \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x}\right)^s \left\{ \log x + \frac{x \log x}{s} \right\}.$$

Pour $p^\lambda > x$ on a $p^\lambda \geq x + \frac{1}{2}$ d'où

$$1 - e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)} < \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s$$

$$\psi_2(x, s) < x^s \sum_{p^\lambda \geq x + \frac{1}{2}} \frac{\log p}{p^{\lambda s}}$$

$$< x^s \sum_{\nu = n+1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu^s}$$

$$< x^s \int_{n+1}^{\infty} \frac{\log x}{x^s} dx + \left(\frac{x}{n+1}\right)^s \log (n+1)$$

$$= \left(\frac{x}{x + \frac{1}{2}}\right)^s \left\{ \log x + \frac{x \log x}{s} \right\}.$$

Remarquant que

$$\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s = \left(1-\frac{1}{2x}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x}} < e^{-\frac{s}{2x+1}}$$

$$\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s = \left(1-\frac{1}{2x+1}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x+1}}$$

il vient donc, d'après (35),

$$\Psi(x, s) = \psi(x) + e^{-\frac{s}{2x+1}}\left\{\log x + \frac{x \log x}{s}\right\} \tag{36}$$

$$\left(x = n + \frac{1}{2},\ s \geqq 2\right).$$

La combinaison de cette formule avec (9) donne

$$\psi(x) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right) \tag{37}$$

$$+\left\{\frac{x+\log s}{s}\right\} + e^{-\frac{s}{2x+1}}\left\{\log x + \frac{x\log x}{s}\right\}$$

$$\left(x = n + \frac{1}{2},\ s \geqq 2\right).$$

Écrivons la série figurant dans cette expression sous la forme

$$\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right) = \sum_{|\beta|<B} \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right) + R(B) \tag{38}$$

où la première somme embrasse tous les termes où le module de la partie imaginaire de ϱ ne dépasse pas un nombre entier donné B et où $R(B)$ désigne la somme de tous les autres termes. D'après ce qui a été dit plus haut (nº 6) on trouve facilement

$$|R(B)| < K.x.\sum_{m=B}^{\infty}\frac{\log m}{m}.e^{-\frac{km}{s}} \qquad (K = \text{constante}) \tag{39}$$

Choisissons maintenant s tel que l'on ait

$$e^{-\frac{kB}{s}} < \frac{1}{B};$$

il suffit pour cela de prendre

$$s = \frac{kB}{\log B} \tag{40}$$

et on a alors (du moins pour $B \geq 3$)

$$e^{-\frac{km}{s}} < \frac{1}{m} \qquad (\text{pour } m > B)$$

d'où

$$|R(B)| < K \,.\, x \,.\, \sum_{m=B}^{x} \frac{\log m}{m^2}\,.$$

Comme on a

$$\sum_{m=B}^{x} \frac{\log m}{m^2} < \frac{\log B}{B^2} + \int_B^{x} \frac{\log y}{y^2}\, dy$$

$$= \frac{\log B}{B^2} + \frac{\log B}{B} + \frac{1}{B}$$

il vient donc

$$|R(B)| < K_1 \,.\, x \,.\, \frac{\log B}{B} \qquad (K_1 = \text{constante})$$

ce qui, eu égard à (40), permet d'écrire (37) sous la forme

$$\psi(x) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{|\beta| < B} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) \tag{41}$$

$$+ \left\{\frac{x \log B + (\log B)^2}{B}\right\} + e^{-\frac{kB}{(2x+1)\log B}} \left\{\log x + \frac{x \log x \log B}{B}\right\}$$

$$\left(x = n + \frac{1}{2}, \quad B > 2\right).$$

Cette formule montre que l'expression

$$x - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{|\beta| < B} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) \tag{42}$$

représente asymptotiquement la fonction $\psi(x)$ et donne aussi le moyen de calculer l'approximation correspondante à une valeur donnée de B. Nous nous bornerons ici à considérer quelques cas simples.

Prenons d'abord $B = 2x (\log x)^2$; on aura

$$e^{-\frac{kB}{(2x+1)\log B}} = x^{-k} (1 + \eta)$$

η tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Comme k est plus grand que *un* on voit donc que

$$e^{-\frac{kB}{(2x+1)\log B}}\left\{\log x + \frac{x\log x\log B}{B}\right\}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Il en est de même de

$$\left\{\frac{x\log B + (\log B)^2}{B}\right\}.$$

Donc, si l'on prend dans l'expression (42) $B = 2x(\log x)^2$,

$$s = \frac{2kx(\log x)^2}{\log x + 2\log\log x + \log 2}$$

la différence entre cette expression et $\psi(x)$ tendra vers zéro avec $\frac{1}{x}$, x étant supposé de la forme $n+\frac{1}{2}$ ($n =$ nombre entier).

Prenant maintenant

$$B = x^\mu \qquad (0<\mu<1)$$

on voit facilement que l'expression

$$\left\{\frac{x\log B + (\log B)^2}{B}\right\} + e^{-\frac{kB}{(2x+1)\log B}}\left\{\log x + \frac{x\log x\log B}{B}\right\}$$

reste inférieure à $Kx^{1-\mu}(\log x)^2$ ($K =$ constante) d'où l'on conclut que, pour ce choix de B, l'expression (42) représente la fonction $\psi(x)$ avec une erreur moindre que $Kx^{1-\mu}(\log x)^2$ $\left(\text{pour } x = n+\frac{1}{2}\right)$.

Se rappelant que la fonction

$$\log 2\pi + \log\left(1-\frac{1}{x^2}\right),$$

pour $x \geq 2$, reste au dessous d'une certaine constante et que la fonction $\psi(x)$ n'augmente que d'une quantité au plus égale à $\log x$ quand x passe par une valeur de discontinuité de la fonction, on peut donc dire que *l'expression*

$$x - \sum_{|\beta|<x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho}\,\Gamma\left(1-\frac{\mu\varrho\log x}{kx^\mu}\right)$$

représente $\psi(x)$ avec une erreur moindre que $Kx^{1-\mu}(\log x)^2$, x n'étant plus assujetti à aucune condition.

Pour $\mu = \frac{1}{2}$ en obtient la conclusion suivante:

On peut mettre approximativement

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho \log x}{2k\sqrt{x}}\right),$$

l'erreur commise étant en valeur absolue au plus égale à $K\sqrt{x}\,.\,(\log x)^2$ (K = constante).

Par un raisonnement dont je me suis servi autrefois (Acta math. t. 24) on prouve que la somme

$$\sum \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right),$$

étendue à ceux des zéros de $\zeta(x)$ dont la partie réelle est $= \frac{1}{2}$, est inférieure à

$$K\sqrt{x}\,.\,(\log s)^2.$$

On en conclut $\left(\text{en prenant } s = \frac{2k\sqrt{x}}{\log x}\right)$ que l'on peut, dans l'énoncé précédent, borner la somme

$$\sum_{|\beta| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho \log x}{2k\sqrt{x}}\right) \tag{43}$$

à ceux des zéros $\varrho = \alpha + i\beta$ qui satisfont aux deux inégalités $|\beta| < \sqrt{x}$ et

$$\alpha \gtrless \frac{1}{2}. \tag{44}$$

Si l'on admettait, avec Riemann, l'impossibilité de l'inégalité (44), la somme (43) se réduirait à zéro et le dernier énoncé coïnciderait avec un résultat déjà établi.

Djursholm 31/8 08.

MÉMOIRE SUR LES SURFACES HYPERELLIPTIQUES.

PAR

MM. FEDERIGO ENRIQUES et FRANCESCO SEVERI.

à Boulogna. à Padova.

Couronné par l'Académie des Sciences de Paris (1907).

VIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 3 (type II).

73. — *Transformations hermitiennes périodiques d'ordre trois.* — Soit F une surface de Jacobi admettant une, et par conséquent ∞^2, transformations hermitiennes périodiques d'ordre 3, correspondant à une transformation τ d'ordre 3 de la courbe associée f.

Rappelons-nous que la transformation singulière τ jouit des propriétés suivantes:

a) Le groupe formé par un point ξ de f et par les points ξ', ξ'' correspondants à ξ au moyen de τ et de τ^2, donne, au varier de ξ, une série linéaire g_3^1 de la courbe f.

b) La transformation τ admet *quatre* points de coïncidence qui se distribuent en deux couples de la g_2^1 appartenant à f.

La transformation τ peut être envisagée aussi comme une transformation birationnelle entre les couples de points de f: on a ainsi sur la surface de Jacobi F une transformation de Hermite T, qui correspond à τ. Pour déterminer le nombre des points de coïncidence de T, il faut chercher les couples de points de f, qui sont invariant par rapport à la transformation τ.

Soient

$$A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$$

les quatre points de coïncidence de τ; A_1, A_2 et B_1, B_2 étant respectivement conjugués par rapport à la g_2^1.

Désignons d'une façon générale par $2P$ le couple donné par deux points coïncidant avec P, et par $P+Q$ le couple donné par les points P, Q. On a alors les couples $2A_1$, $2A_2$, $2B_1$, $2B_2$, A_1+A_2, B_1+B_2, A_1+B_1, A_2+B_2, A_1+B_2, A_2+B_1, invariant par rapport à τ; et on ne peut pas avoir d'autres couples jouissant de la même propriété, car tout couple $P+Q$ qui est ramené en lui-

même par τ, doit être formé par deux points de coïncidence de la transformation:

$$\tau^2 \quad \tau^{-1}.$$

Il semble au premier abord qu'on aura sur F, 10 points de coïncidence de la transformation T. Mais il ne faut pas oublier que si la surface F n'a pas de courbes exceptionnelles (n. 17), la correspondance entre les points de F et les couples de f, n'est pas biunivoque sans exception, car tout couple de la g_2^1 vient représenté par un même point de F (n. 14, c); ainsi donc les deux couples

$$A_1 + A_2,\ B_1 + B_2$$

appartenant à la g_2^1 correspondent à un même point de coïncidence de T sur F. Pourtant *on a sur F neuf points de coïncidence de la transformation T.*

Envisageons maintenant le système complet Σ, déterminé par les courbes C de F répondant aux couples de f qui renferment un même point. La T change en lui-même le système Σ et fait correspondre les courbes de celui-ci, conçues comme les éléments d'une variété hyperelliptique, suivant une transformation hermitienne d'ordre 3.

En vertu de la dualité entre les points de F et les courbes du système (n. 23), on peut affirmer tout de suite que *T change en elles-mêmes neuf courbes du système Σ.*

Entre ces courbes et les neuf points de coïncidence, il y a des relations remarquables, que nous allons établir.

Soit O un des points de coïncidence, et H le système ∞^1 formé des courbes C issues par O.

La transformation T change en lui-même le système H, et elle donne naissance à une transformation singulière d'ordre 3 entre les courbes du système H, conçu comme une variété ∞^1 d'éléments, birationnellement identique à la courbe f (n. 22). On a donc *quatre* éléments de H qui demeurent invariant par rapport à la transformation T, c'est-à-dire que des neuf courbes C unies, quatre passent par le point O.

Les quatre éléments unis, en vertu de la propriété b) rappelée ci-dessus, se distribuent en deux couples de la série g_2^1 appartenant à la variété H.

Comme les couples de cette série sont donnés par les couples de courbes C se touchant en O, on en conclut que les courbes unies issues par O se distribuent en deux couples $a, b,$ et c, d de courbes tangentes.

En considérant d'une façon analogue la transformation d'ordre 3 déterminée par T sur une des courbes unies, on trouve sur cette courbe quatre points de coïncidence distribués en deux couples de la g_2^1 relative à la courbe envisagée.

Mais il y en a davantage. Deux courbes unies se coupent certainement en deux points de coïncidence, car ces points doivent être unis par rapport à la transformation

$$T^2 = T^{-1}.$$

Or ces points peuvent être distincts ou coïncidents.

On a p. ex. le premier cas relativement aux courbes a, c et le second relativement aux courbes a, b.

Analoguement par deux points de coïncidence il peut passer deux courbes unies, distinctes ou coïncidentes. Le second cas se présente seulement lorsque les points unis envisagés sont conjugués par rapport à la g_2^1 de la courbe unie.

Dans la suite nous dirons que *deux points de coïncidence sont conjugués* lorsqu'ils appartiennent à une seule courbe unie; et nous dirons aussi que *deux courbes unies sont conjuguées* lorsqu'elles se touchent.

En résumant, la configuration formée par les courbes et les points unis de la transformation T, jouit des propriétés suivantes:

Par un point passent quatre courbes, distribuées en deux couples de courbes conjugués.

Deux points appartiennent à une ou à deux courbes, suivant qu'ils sont ou qu'ils ne sont pas conjugués.

Une courbe renferme quatre points, distribués en deux couples de points conjugués.

Deux courbes se coupent en un ou en deux points, suivant qu'elles sont ou qu'elles ne sont pas conjuguées.

Ces propriétés peuvent s'exprimer d'une façon élégante et complète au moyen de l'algorithme suivant, qui a une très grande analogie avec l'algorithme adopté par M. Humbert pour la cfg. des points et des plans singuliers d'une surface de Kummer (n. 46).

Envisageons les deux séries de nombres

$$1,\ 2,\ 3 \quad \text{et} \quad 1',\ 2',\ 3',$$

et désignons par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \quad \text{et} \quad \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

deux permutations quelconque de ces séries. On peut représenter les neuf courbes et les neuf points unis de la transformation T de F, respectivement par les symboles

$$11',\ 12',\ 13',\ 21',\ 22',\ 23',\ 31',\ 32',\ 33'$$

$$(11'),\ (12'),\ (13'),\ (21'),\ (22'),\ (23'),\ (31'),\ (32'),\ (33');$$

et cela de façon que

1) *Les points appartenant à la courbe $\alpha\alpha'$, soient*

$$(\alpha\beta'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha'\beta),\quad (\alpha'\gamma).$$

2) *Les courbes passant par le point* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma.$$

3) *Deux points ou deux courbes soient conjugués lorsque les symboles relatifs ont un caractère commun*

$$[\text{p. ex. } \alpha\beta', \alpha\gamma' \text{ et } (\alpha\beta'), (\alpha\gamma')].$$

On voit que les points conjugués au point $(\alpha\alpha')$ ont les symboles

$$(\alpha\beta'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\alpha'\gamma),$$

et par suite ils appartiennent à la courbe $\alpha\alpha'$. Analoguement les courbes conjuguées à une courbe donnée $\alpha\alpha'$ passent par le point $(\alpha\alpha')$.

On exprimera ce rapport en disant que *le point* $(\alpha\alpha')$ *et la courbe* $\alpha\alpha'$ *sont conjugués.* Nous verrons dans la suite comment on peut rattacher l'algorithme que nous avons défini, aux propriétés des fonctions Θ appartenant à la surface de Jacobi F.

74. *Propriétés infinitésimales d'un point uni de la transformation T.* Il nous sera utile de connaître ce qui se passe dans le domaine d'un point de coïncidence O de la transformation T.

On établit aisément que la transformation T détermine une homographie périodique d'ordre 3 entre les points appartenant au domaine du point uni O, et que les coïncidences de cette homographie tombent en les points de contact des couples de courbes unies passant par O.

En effet la transformation T ne peut pas changer entre elles deux courbes arbitraires C de Σ se touchant en O, car dans l'hypothèse contraire ces courbes résulteraient invariantes par rapport à la transformation

$$T^2 = T^{-1},$$

et par suite elles seraient des courbes unies de la transformation T.

Il s'ensuit que T change tout couple de courbes C se touchant en O, en un couple analogue, mais distinct du premier.

Il faudra donc que T change un point arbitraire appartenant au domaine de O, en un *autre* point du même domaine. Ce point à son tour ne pourra pas être changé en le premier, car autrement T^2 donnerait lieu à une homographie identique dans le domaine de O.

On en conclut que T détermine dans le domaine de O une homographie de 3^{me} ordre, dont les coïncidences tombent évidemment dans les points communs aux couples de courbes unies.

75. *L'involution I_3 engendrée par la transformation T.* En associant à tout point P de F les points P', P'' correspondants à P par rapport aux transformations T, T^2, on obtient une involution I_3, possédant neuf groupes de coïncidences, dont chacun est formé de trois points coïncidents.

Nous nous proposons d'étudier la surface régulière Φ qui représente (sans exception) les groupes de I_3.

Disons C', C'' les courbes de F transformées d'une courbe C de Σ, par rapport à T, T^2, et observons que la courbe réductible

$$D = C + C' + C''$$

appartient à l'involution I_3, c'est-à-dire que les points conjugués de tout point de D, appartiennent aussi à cette courbe.

La correspondance (1, 3) entre les points de Φ et les points de F, transforme la courbe C de F en une courbe Γ de Φ birationnellement identique a C: eh bien cette courbe Γ est aussi la transformée des courbes C', C'', c'est-à-dire qu'elle *représente* la série des groupes de I_3 appartenant à la courbe D. La courbe Γ a deux points doubles, car il existe sur C deux couples de points conjugués par rapport à I_3, qui sont donnés par les quatre intersections des courbes C', C'' avec C.

Lorsque C décrit le système Σ, la courbe Γ décrit un système continu; et comme la surface Φ ne possède pas d'intégrales simples de première espèce, d'aprés M. Humbert ce système continu doit être renfermé en un système linéaire $|\Gamma|$ de courbes du même ordre.

Faisons maintenant les remarques suivantes:

1) Le système $|\Gamma|$ n'a pas de points-base. En effet la correspondance [1, 3] entre Φ, F n'ayant pas des points fondamentaux sur la surface Φ — c'est-à-dire des points de Φ auxquels correspondent des courbes de F — au système Σ dépourvu de points-base, correspond sur Φ un système jouissant de la même propriété.

2) Le *genre* du système $|\Gamma|$ est

$$\pi = 4.$$

En effet le genre d'une courbe arbitraire du système linéaire, est égal au genre d'une courbe Γ répondant à une courbe C, augmenté du nombre des points doubles de Γ.

3) Le *degré* de $|\Gamma|$ (c'est-à-dire le nombre des intersections de deux Γ) est

$$n = 6.$$

En effet les 18 points communs à deux courbes D, se partagent en six groupes de l'involution I_3.

4) La dimension de $|\Gamma|$ est

$$r \geq 3,$$

car ce système linéaire doit renfermer un système continu ∞^2, non linéaire, de courbes douées de deux points doubles.

5) Le système $|\Gamma|$ est un système *simple*, c'est-à-dire que les courbes Γ passant par un point quelconque de la surface Φ, ne vont passer en conséquence par d'autres points mobiles avec celui-ci.

Etant donnés sur Φ deux points quelconque M, N, il suffira de prouver qu'il y a des courbes Γ passant par M et non par N.

Soient

$$P P' P'', \quad Q Q' Q''$$

les deux groupes de I_3 répondant aux points M, N de Φ. Comme les courbes C passant par P n'ont d'autres points communs, on pourra fixer une de ces courbes, qui ne passe par aucun des points Q, Q', Q''. Alors les courbes C', C'' transformées de C, viennent passer respectivement par les points P', P'', mais non par Q, Q', Q''. On a ainsi sur Φ une courbe Γ — image de la courbe

$$D = C + C' + C'' \text{ —}$$

qui passe par M et non par N.

Comme il est bien connu, en vertu des propriétés 4) et 5) on pourra transformer birationnellement la surface Φ en une surface de l'espace à r dimensions, de telle façon qu'aux courbes du système $|\Gamma|$ répondent les sections hyperplanes de la surface transformée, qui résultera d'ordre 6, 6 étant le degré de $|\Gamma|$.

Dans la suite (aucune ambiguïté n'étant pas possible) nous désignerons encore par Φ, ou par Φ_6, la surface d'ordre 6 de l'espace S_r, et par Γ ses sections hyperplanes, qui seront des courbes de genre 4.

76. — *La surface* Φ_6. — Remarquons d'abord que la dimension r de l'éspace renfermant la surface Φ_6, ne peut pas être plus grande que 4, car les sections hyperplanes de la surface, étant des courbes d'ordre 6 et de genre 4, ne peuvent pas appartenir à un espace de dimension > 3. On aura donc

$$r = 3 \quad \text{ou} \quad r = 4.$$

La première valeur de r sera écartée, lorsque nous aurons démontré que »la surface Φ ne peut pas renfermer des lignes multiples«; car une section hyperplane *arbitraire* de Φ résultera alors une courbe d'ordre 6 et de genre 4, dé-

pourvue de points multiples, et par suite elle ne pourra pas appartenir à un plan. Pour établir le fait énoncé, observons que, si P est un point de la surface de Jacobi F, distinct des neuf points de coïncidence, on peut toujours construire deux courbes D passant par le groupe $PP'P''$ déterminé par P, et se coupant, hors de ce groupe, en 5 groupes distincts de l'involution I_3. Il suffit en effet de choisir deux courbes arbitraires C, C_0 de Σ passant par P, et de considérer les courbes C', C''; C'_0, C''_0 qui leur correspondent au moyen de T et de T^2. On a ainsi deux courbes D

$$C + C' + C'', \quad C_0 + C'_0 + C''_0$$

satisfaisant à la condition enoncée.

Designons par M le point de Φ image du groupe $PP'P''$.

Les courbes D envisagées ont pour images deux sections hyperplanes de Φ, issues par le point M et se coupant *hors* de M en *cinq* points: on en conclut que M est un point simple de Φ, c'est-à-dire qu'à tout point P de F, ne tombant pas en un point uni de la transformation T, correspond un point simple M de la surface Φ; et par suite que cette surface n'a que neuf points multiples (au plus).

Il s'agit maintenant d'examiner la nature des points de Φ qui correspondent aux points de coïncidence.

Soit O le point de Φ correspondant au point de coïncidence $(11')$, ayant adopté pour les points et pour les courbes unis de la transformation T l'algorithme introduit au n. 73.

Lorsque la courbe C variable dans le système Σ, vient coïncider avec la courbe $12'$ issue par $(11')$, les courbes C', C'' transformées de C par rapport à T et à T^2, viennent aussi coïncider avec $12'$, de sorte que la courbe $12'$ comptée trois fois, donnera une courbe totale du système linéaire $|D|$.

Il s'ensuit qu'en comptant trois fois la courbe de Φ correspondante à la courbe $12'$, on obtient une section hyperplane de Φ; pourtant à $12'$ correspondra sur Φ une conique, et il y aura un hyperplan ayant un contact d'ordre 2 avec la surface Φ en tout point de cette conique.

On a ainsi sur Φ quatre coniques passant par le point O, et correspondant aux quatre courbes unies, issues par $(11')$.

Nous désignerons ces coniques avec les mêmes symboles qui appartiennent aux courbes unies correspondantes.

Un hyperplan arbitraire passant par O coupe la conique $12'$, hors de O, en *un* point: donc la courbe D correspondante à la section hyperplane envisagée, doit couper la courbe $12'$ en *trois* points différents de $(11')$; c'est-à-dire que le point $(11')$ doit absorber 3 parmi les 2.3 intersections des courbes D et $12'$.

La même conclusion peut être rapportée aux courbes $13'$, $1'2$, $1'3$.

Il s'ensuit que la courbe D a en $(11')$ un point multiple d'ordre

$$s = 2 \quad \text{ou} \quad s = 3;$$

dans le premier cas les deux branches de la courbe D touchent les couples de courbes conjuguées $12'$, $13'$, et $1'2$, $1'3$, tandis que dans le second cas on n'a pas des contacts de ces courbes avec D.

On voit tout de suite que le cas $s = 3$ est réellement possible. En effet les courbes C', C'' transformées d'une courbe C passant par (11), mais ne touchant aucune des courbes unies, passent aussi par $(11')$ de sorte que la courbe particulière

$$D = C + C' + C''$$

vient passer par $(11')$ avec trois branches non tangentes entre elles. Les points de ces branches infiniment prochains à $(11')$ donnent un groupe de I_3, c'est-à-dire un cycle de l'homographie périodique d'ordre 3 qui résulte définie dans le domaine de $(11')$ (n. 74).

Remarquons encore que la courbe Γ de genre deux répondant à la courbe $C + C' + C''$, n'a qu'un point double distinct du point O; en effet la courbe C renferme deux couples de points conjugués par rapport à I_3, dont l'un est formé par deux points coïncidents avec $(11')$, et l'autre par les intersections ultérieures de la courbe C avec C', C''.

Comme une courbe gauche Γ d'ordre 6 et de genre 2, ayant un point double, ne peut pas posséder un autre point multiple d'ordre > 2, on en conclut que Γ a en O un point double, et par suite que O ne peut pas être un point multiple d'ordre > 2 pour la surface. Cette conclusion conduit tout naturellement aux propriétés suivantes:

1) Une courbe *arbitraire* D passant par $(11')$, c'est-à-dire une courbe répondant à une section hyperplane Γ, issue arbitrairement par O, a en $(11')$ un point multiple d'ordre 2 dont les deux branches touchent respectivement les couples de courbes tangentes

$$12',\ 13' \quad \text{et} \quad 1'2,\ 1'3.$$

En effet si pour une D arbitraire l'on avait $s = 3$, deux courbes D auraient communs, hors de $(11')$, seulement

$$18 - 3 \cdot 3 = 9$$

points, et par suite deux sections hyperplanes arbitraires Γ passant par O, se couperaient, hors de O, en $\frac{9}{3} = 3$ points, c'est-à-dire que O serait un point triple de la surface Φ.

2) Au système linéaire des sections de Φ avec les hyperplanes passant par O, répond sur F un système linéaire H de courbes D ayant en $(11')$ un point-base double avec deux points-base simples infiniment voisins, qui sont les points de contact des couples de courbes $12'$, $13'$ et $1'2$, $1'3$.

On ne peut pas avoir d'autre points-base *successifs*, car le point O étant double pour la surface Φ, le point $(11')$ doit absorber seulement 3.2 intersections de deux courbes D, répondant à deux sections hyperplanes issues par O.

3) Un hyperplan arbitraire passant par O coupe Φ suivant une courbe Γ ayant en O un point double *nodale* (intersection de deux branches ou cycles non tangentes) car sur la courbe D correspondante à Γ, on a *deux* groupes distincts de I_3 formés par des points infiniment voisins à $(11')$. On obtient ces groupes en comptant trois fois les points-base simples, c'est-à-dire les points unis de l'homographie d'ordre 3 qui résulte définie dans le domaine de $(11')$.

Cette propriété nous montre que le point O ne peut pas être un point double uniplanaire de la surface Φ (c'est-à-dire un point où le cône tangent se réduit à un plan double), car en cette hypothèse une section hyperplane arbitraire issue par O, aurait en O un point double avec une seule tangente.

Nous démontrerons que *le point O est un point double biplanaire*, c'est-à-dire un point où le cône se réduit à deux plans. Il suffira de prouver qu'il y a un système linéaire ∞^1 d'hyperplans issus par O, donnant des sections qui ont en O un point double avec une seule tangente.

En effet, de la propriété 2) on tire que les courbes D ayant en $(11')$ un point triple, forment un système linéaire ∞^2, car en imposant à une courbe D du système linéaire ∞^3 H la condition de toucher en $(11')$ une droite différente des deux tangentes fixes, on obtient une courbe ayant en $(11')$ un point triple

Comme sur une telle courbe il y a un seul groupe de I_3 formé par des points infinement voisins à $(11')$, à cette courbe répondra une courbe Γ passant par O avec une seule branche; et par suite le point double O, étant origine d'un seul cycle, résultera un point de rebroussement de Γ. On a ainsi un système linéaire de ∞^2 hyperplans coupant Φ suivant des courbes douées d'un point de rebroussement en O, et d'une même tangente o en celui-ci. Il s'ensuit que le cône tangent à Φ en O se réduit à deux plans se coupant dans la droite o. En outre il est aisé de voir que le point o est un *point biplanaire ordinaire*, c'est-à-dire que le point de rebroussement d'une des courbes sections hyperplanes par o, est de première espèce,[1] ou, en d'autres termes, que la droite o a un contact de second ordre avec la surface Φ.

[1] Voir p. e. APPELL et GOURSAT, Théorie des fonctions algébriques. — (Paris, Gauthier Villars, 1895) n° 88

En effet considérons deux courbes D arbitraires ayant un point triple en $(11')$; comme ces courbes se coupent, hors de $(11')$, en 9 points, deux courbes Γ arbitraires passant par la droite o se coupent, hors de O, en $\frac{9}{3} = 3$ points.

Pour achever l'analyse du point double O, il faut encore remarquer que, en disant E_1 le point de F infiniment voisin à $(11')$ et commun aux courbes unies $12'$, $13'$, la correspondance T vient déterminer dans le domaine de E_1 une homographie identique, de sorte que E_1 résulte une *coïncidence parfaite* de la transformation T. En effet une des branches d'une courbe D ayant en $(11')$ un point double, contient trois points unis *successifs* de la transformation T: deux de ces points — c'est-à-dire $(11')$ et E_1 — restent fixes au varier de D; tandis que le troisième décrit le domaine de E_1. On peut répéter les mêmes remarques pour le point E_2 infiniment voisin à $(11')$ et commun aux courbes $1'2$, $1'3$.

De tout ce qui précède on tire qu'aux points »de Φ infiniment voisins à O sur les deux plans tangents à la surface, répondent respectivement les points de F appartenant aux domaines de E_1 et de E_2, tandis qu'aux points de Φ infiniment voisins au point simple O_1 successif à O suivant la direction o, répondent des ternes de points appartenant au domaine de $(11')$.»

Les propriétés de la correspondance $[1, 3]$ entre Φ et F résultent ainsi définies d'une façon complète.

Comme sur F les courbes unies $12'$, $13'$ passent par E_1, tandis qu'elles n'ont pas d'autres points communs successifs à E_1, il s'ensuit que les coniques $12'$, $13'$ issues par O, touchent un même plan tangent suivant deux directions distinctes entre elles et de la direction o.

Analoguement les coniques $1'2$, $1'3$ touchent l'autre plan tangent.

Désignons les neuf points doubles et les neuf coniques de Φ par les mêmes symboles qui représentent les points et les courbes correspondants de la surface F et appelons conjugués deux éléments de la cfg. considérée sur Φ, lorsqu'ils sont les images de deux éléments conjugués de la cfg. de F (n. 73); on pourra énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang 3 et du type II, *peut être transformée birationnellement en une surface Φ_6, d'ordre* 6, *appartenant à l'espace à quatre dimensions. Les sections hyperplanes de cette surface sont des courbes canoniques de genre* 4. *Il y a neuf points doubles biplanaires ordinaires et neuf coniques, qui forment une configuration jouissant des propriétés suivantes:*

Par un point passent quatre coniques.	*Une conique renferme quatre points.*
Deux points appartiennent à une ou deux coniques.	*Deux coniques se coupent suivant un ou deux points.*
Dans le premier cas les 2 points s'appellent *conjugués.*	Dans le premier cas les 2 coniques s'appellent *conjuguées.*

On peut représenter respectivement les neuf points et les neuf coniques avec les symboles $(\alpha\alpha')$, .. *et* $\alpha\alpha'$, .. *(où* $\alpha, \alpha', .. = 1, 2, 3; 1', 2', 3'$*), de façon que:*

1) *Les points appartenant à la conique* $\alpha\alpha'$, *soient*

$$(\alpha\beta'),\ (\alpha\gamma'),\ (\alpha'\beta),\ (\alpha'\gamma).$$

2) *Les coniques passant par* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta',\ \alpha\gamma',\ \alpha'\beta,\ \alpha'\gamma.$$

3) *Les points conjugués à* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$(\alpha\beta'),\ (\alpha\gamma'),\ (\alpha'\beta),\ (\alpha'\gamma).$$

4) *Les coniques conjuguées à* $\alpha\alpha'$ *soient*

$$\alpha\beta',\ \alpha\gamma',\ \alpha'\beta,\ \alpha'\gamma.$$

Les coniques $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$ *passant par* $(\alpha\alpha')$, *touchent un même plan tangent à* Φ *en* $(\alpha\alpha')$, *tandis que les coniques* $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$ *touchent l'autre plan tangent en* $(\alpha\alpha')$.

Toute conique $\alpha\alpha'$ *de la cfg. appartient à un hyperplan ayant un contact d'ordre 2 avec* Φ *suivant la conique* $\alpha\alpha'$.

Remarquons enfin que *les 4 points doubles de* Φ *appartenant à une même conique, ont sur celle-ci un rapport anharmonique qui ne dépend pas de la conique considérée et qui est l'invariant de la courbe de genre 2 associée à* Φ (courbe représentée sur la conique triple ayant 4 points de diramation dans les points indiqués).

77. *Les genres de la surface* Φ_6. En nous rapportant à la surface Φ_6 qui fournit le modèle des surfaces hyperelliptiques du type II, il est aisé de reconnaître à postériori que *ces surfaces ont les genres*

$$p_a = p_g = 1.$$

Remarquons d'abord que la surface Φ_6 est l'intersection d'une variété quadrique et d'une variété cubique de S_4; c'est là une conséquence de ce que toute section hyperplane de genre 4 de Φ_6 est l'intersection de deux surfaces

d'ordre 2, 3.[1] Or la surface intersection de deux variétés d'ordre 2, 3 en S_4 a en général les genres $p_a = p_g = 1$;[2] mais comme notre surface Φ_6 n'a pas des points singuliers abaissant le genre numérique, on en conclut que le genre numérique de Φ_6 sera aussi

$$p_a = 1 .$$

Il s'ensuit que

$$p_g = 1 ;$$

ce qui d'ailleurs se reconnaît aussi directement en montrant que le système linéaire $|\Gamma|$ est adjoint à lui même.

78. *La surface hyperelliptique Φ_6 caractérisée par la configuration de ses points et hyperplans singuliers.* Nous venons de reconnaître que toute surface hyperelliptique du type II peut être ramenée par une transformation birationnelle à une surface Φ_6 d'ordre 6 et de genres 1 en S_4, qui possède 9 points biplanaires et 9 hyperplans ayant un contact d'ordre 2 suivant des coniques; ces points et hyperplans singuliers forment une configuration que nous avons définie au n. 76.

Donnons-nous maintenant une surface Φ_6 d'ordre 6 et de genres $p_a = p_g = 1$, en S_4, et supposons que cette surface possède une configuration de 9 points et de 9 hyperplans singuliers satisfaisant aux conditions établies; il s'agit de reconnaître si Φ_6 est une surface hyperelliptique de rang 3.

A cet effet nous procéderons par la même méthode que nous avons employé au n. 49.

Nous tâcherons de construire une surface hyperelliptique de rang 1, F, qui soit représentée sur la surface Φ_6 comptée trois fois; on obtiendra une telle surface F en opérant sur les points de Φ_6 par l'extraction d'une racine cubique portant sur une fonction rationnelle de ces points.

Soient $f_1(x_1, \ldots, x_5) = 0$, $f_2(x_1, \ldots, x_5) = 0$, les équations homogènes (d'ordre 2, 3) qui représentent la surface Φ_6 dans l'espace $S_4(x)$.

Considérons une forme cubique $\varphi(x_1, \ldots, x_5)$ et construisons en S_5 la surface F qui est représentée par les équations suivantes:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \ldots y_5 = x_5, & y_6 = \sqrt[3]{\varphi}. \\ f_1 = 0, & f_2 = 0 . \end{cases}$$

Nous voulons démontrer que, par un choix convenable de φ, la surface F qui se trouve représentée sur la Φ_6 comptée 3 fois, aura les genres

[1] Cfr. Enriques »Ricerche ...« (l. c. V, 5).
[2] l. c. III, 6.

$$p_a = -1, \quad p_g = P_4 = 1,$$

et sera donc une surface hyperelliptique de rang 1 (et même en ce cas une surface de Jacobi).

Faisons d'abord les remarques générales suivantes.

Si l'on prend φ d'une façon arbitraire, on obtient une surface F qui est représentée sur Φ_6 comptée 3 fois et l'on a sur cette dernière surface une courbe de diramation découpée par

$$\varphi = 0 .$$

Cependant:

1) Si de cette courbe fait partie une composante comptée 3 fois, celle-ci n'est pas lieu de points de diramation, mais seulement de points critiques apparents de la surface triple. Pourtant il faudra retrancher de la section de $\varphi = 0$ toute composante qui soit comptée $3s$ fois; et on pourra compter comme simple toute composante qui figure $3s + 1$ ou $3s + 2$ fois dans la même courbe.

2) Si $\varphi = 0$ passe par un point double (biplanaire) O de Φ_6, on aura que le domaine de Φ_6, sur chaque nappe de la surface, pourra constituer ou non une courbe de diramation infiniment petite; c'est le premier cas qui a lieu si toute branche linéaire de courbe appartenant à cette nappe a $t = 3s + 1$ ou $3s + 2$ intersections avec $\varphi = 0$; au contraire on tombe dans le deuxième cas si $t = 3s$.

3) La surface F ne saurait être réductible s'il y a sur Φ_6 des points de diramation.

Ceci posé on peut choisir trois hyperplans tangents à Φ_6 suivant des coniques, de façon que ces coniques se coupent deux à deux en trois couples de points doubles appartenant à un même triangle, et qu'elles renferment dans leur ensemble tous les 9 points doubles de Φ_6. Il suffit de considérer trois hyperplans qui dans notre symbolisme sont représentés par

$$\alpha\alpha', \quad \alpha\beta', \quad \alpha\gamma'.$$

On peut supposer que les équations de ces hyperplans soient respectivement

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 .$$

Posons

$$\varphi = x_1 x_2 x_3 ,$$

et considérons la surface F qui est représentée par

$$y_1 = x_1, \ldots, y_5 = x_5, \quad y_6 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}, \quad (f_1 = f_2 = 0) .$$

On voit d'abord que, n'existant pas des courbes de diramation propres sur Φ_6, aux sections hyperplanes de Φ_6 correspondent sur F des courbes se coupant en des groupes canoniques, et par conséquent les genres géométriques de F sont égaux à 1:

$$p_g = P_2 = \cdots = 1\,, \quad p^{(1)} = 1\,.$$

En outre les courbes de diramation infiniment petites de Φ_6 donnent lieu sur F, ou sur une transformée de celle-ci, à des courbes exceptionnelles qui se partagent en 9 couples de courbes se coupant en un point; pourtant chaque couple se ramène à un point simple sur une surface de la classe convenablement choisie.

Il s'agit de prouver que le genre numérique de F est

$$p_a = -1\,.$$

A cet effet il faut montrer que les domaines des points doubles (biplanaires) de Φ_6, comptent tous comme des courbes de diramation infiniment petites de la surface triple.

Il y a deux sortes de points doubles de Φ_6; des points tels que $(\alpha\beta')$, $(\alpha\alpha')$, $(\alpha\gamma')$ appartenant à deux parmi les hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; et des points appartenant à un seul parmi ces hyperplans.

Considérons d'abord le point $(\alpha\beta')$.

Les hyperplans associés $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$ qui renferment ce point, ont commun le plan tangent à une nappe de la surface. Or une section hyperplane de celle-ci aura en $(\alpha\beta')$ un point double; et la tangente à une de deux branches étant une droite double pour $\varphi = 0$, cette branche aura 4 intersections avec $\varphi = 0$, tandis que l'autre branche en aura 2. Il s'ensuit que le domaine du point double sur chacune des deux nappes de la surface, compte comme une courbe de diramation infiniment petite.

Il en est de même pour un point, tel que $(\alpha'\beta)$, appartenant à un seul hyperplan parmi ceux qui composent φ. En effet en ce cas le plan tangent à une des deux nappes appartient simplement à φ; ainsi donc en considérant une section hyperplane par le point double, on trouve qu'une branche a 2 intersections, et l'autre *une* intersection avec φ.

Ceci posé on peut évaluer l'invariant de Zeuthen-Segre I de F.

Considérons un faisceau de sections hyperplanes C de Φ_6; à celles-ci correspondent sur F des courbes K de genre $\pi = 10$, ayant $n = 18$ points-base.

En désignant par δ le nombre des courbes K douées d'un point double, on aura

$$I = \delta - n - 4\pi = \delta - 58;$$

et d'ailleurs, puisque le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 1$,

$$I = 12\, p_a - p^{(1)} + 9 = 12\, p_a + 8;$$

pourtant

$$\delta = 66 + 12\, p_a.$$

Il s'agit d'évaluer δ.

On aura

$$\delta = 3\,\delta' + 9\,h,$$

en désignant par δ' le nombre des courbes C qui ont un point double hors des points biplanaires de la surface, et en supposant qu'en un point simple de F (ou d'une transformée) correspondant à un point biplanaire de Φ_6, il y ait un point multiple pour une courbe K, équivalent à h points doubles.

Mais en calculant l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ_6 on trouve

$$I' = \Delta - 6 - 4 \cdot 4 = 20,$$

où

$$\Delta = 42$$

désigne le nombre des C qui sont douées d'un point double. En ce nombre Δ figurent les 9 points biplanaires de la surface, chacun à compter 3 fois d'après l'abaissement qu'il produit sur la classe de la surface; ainsi donc

$$\Delta = 42 = \delta' + 3 \cdot 9,$$
$$\delta' = 15.$$

Il s'ensuit

$$3 \cdot 15 + 9\,h = 66 + 12\, p_a, \quad 9\,h = 12\, p_a + 21,$$

d'où $(-1 \leq p_a \leq 1)$

$$h = 1, \quad p_a = -1;$$

par conséquent le genre numérique de F est

$$p_a = -1. \quad C.Q.F.D.$$

En conclusion on pourra énoncer le théorème suivant:

La surface hyperelliptique Φ_6 d'ordre 6 et de genres $p_a = p_g - 1$, est caracterisée, parmi les surfaces du même ordre et du même genre de S_4, par la configuration de ses 9 points doubles et de ses 9 hyperplans singuliers.

Etant données les équations algébriques de la surface, la méthode précédente nous apprend aussi à *représenter les coordonnées de ses points par des fonctions hyperelliptiques* de deux paramètres u, v; ces paramètres s'introduisent en construisant les deux intégrales simples de première espèce attachée à la surface F définie ci-dessus.

Dans la suite nous aurons lieu d'étudier en détail cette représentation paramétrique.

Remarque. Il y a lieu de remarquer que l'énoncé du théorème précedent renferme des conditions surabondantes.

En effet la condition de posséder 9 points biplanaires entraîne 18 équations auxquelles on doit satisfaire par les 19 modules appartenant à une surface d'ordre 6 et de genre 1 (intersection d'une variété cubique et d'une quadrique) en S_4. Cette remarque nous fait comprendre que: *la surface hyperelliptique Φ_6, dépendant d'un module, résulte déjà caractérisée par la condition de posséder 9 points doubles biplanaires.*

79. *La configuration caractéristique de Φ_6 rattachée à une configuration connue: équations algébriques de Φ_6.* Pour étudier de plus près la configuration caractéristique de Φ_6, il convient de la rattacher à une configuration connue, considérée par MM. Segre [1] et Castelnuovo,[2] c'est-à-dire à la configuration qui est formée par les 9 *points doubles d'un faisceau de variétés cubiques et par les* 9 *plans appartenant à ces variétés.*

D'après MM. Segre et Castelnuovo, il y a en S_4 ∞^{24} groupes de 9 points G_9, qui sont doubles pour une variété cubique; il y a toujours un faisceau de variétés analogues possédant les mêmes points doubles de G_9 et renfermant 9 plans; G_9 ne renferme pas des modules.

Nous allons montrer que: *Toute variété cubique passant doublement par les 9 points d'un G_9, renferme deux surfaces hyperelliptiques Φ_6 ayant comme points biplanaires les points du même G_9.*

Toute Φ_6 ainsi définie dépend d'un module qui est simplement lié au paramètre dont dépendent les variétés du faisceau considéré; pourtant toute surface hyperelliptique Φ_6 du type II peut être obtenue par la construction indiquée, c'est-à-dire que:

Les 9 points biplanaires d'une surface hyperelliptique Φ_6, sont les points doubles de ∞^1 variétés cubiques formant un faisceau.

Considérons les 9 points d'un G_9. D'après M. Castelnuovo (l. c. 15, pg. 24) on pourra les représenter très simplement en ajoutant aux coordonnées $x_1, \ldots, x_5$ des points de S_4, la coordonnée auxiliaire x_6, où

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

On a un faisceau de variétés cubiques

[1] C. Segre »Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni ...» Memorie Accad. Torino, s. II, t. 39 (1888).

[2] G. Castelnuovo »Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni». II. Memoria Atti Istituto Veneto t. VI, s. 6 (1888

(1) $$x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0,$$

qui ont les 9 points doubles

$$\begin{array}{lll}
(1\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0) & (1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0) & (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1) \\
(0\ 1\ 0\ -1\ 0\ 0) & (0\ 1\ 0\ 0\ -1\ 0) & (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ -1) \\
(0\ 0\ 1\ -1\ 0\ 0) & (0\ 0\ 1\ 0\ -1\ 0) & (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ -1)
\end{array}$$

que nous désignerons respectivement par 1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9).

Les 9 points, formant un groupe G_9, se trouvent quatre à quatre sur 9 plans tels que

$$x_1 = x_4 = 0, \quad x_1 = x_5 = 0, \ldots$$

et ces plans appartiennent aux mêmes variétés cubiques de notre faisceau.

Entre les 9 points doubles et les 9 plans-base des (1), il y a les mêmes relations qui passent entre les points doubles d'une surface Φ_6 et les plans de ses coniques.

Or parmi les variétés du faisceau (1) il y en a *une* douée de 10 *points* doubles, le dixième point tombant en $P = (1\ 1\ 1 - 1 - 1 - 1)$.

Considérons ce point P, covariant du groupe G_9, et formons la quadrique polaire de P par rapport à la variété

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda' x_4 x_5 x_6 = 0$$

on trouvera

(2) $$x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 + \lambda' (x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5) = 0.$$

Cette quadrique coupe le plan

$$x_1 = x_4 = 0$$

suivant la conique

$$x_2 x_3 + \lambda' x_5 x_6 = 0$$

qui renferme les quatre points 5) 6) 8) 9).

Il est aisé d'évaluer le rapport anharmonique que ces quatre points forment sur la conique; il suffit de les projeter par le point 8) suivant les droites

$$x_3 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_3 + x_5 = 0, \quad x_3 - \lambda' x_5 = 0.$$

En prenant les points dans l'ordre 5) 6) 9) 8), on obtient le rapport anharmonique $-\lambda'$.

Cette valeur ne dépend pas des indices des x; par conséquent la quadrique

(2) coupe les 9 plans-base du faisceau (1) suivant des coniques qui renferment quatre points 1) . . . 9), ayant sur la conique respective le même rapport anharmonique.

On obtient ainsi une configuration de 9 points et de 9 coniques satisfaisant aux mêmes conditions que la configuration caracteristique d'une surface hyperelliptique Φ_6.

Nous allons reconnaître qu'il y a toujours dans le faisceau (1) une variété coupant la quadrique (2) suivant une surface Φ_6 qui renferme les 9 coniques et qui a 9 points biplanaires en 1) . . . . . 9).

A cet effet, étant donnée la quadrique (2), tâchons de déterminer une variété (1) de façon qu'un des points 1) . . . . 9), p. ex. le point 1), soit un point biplanaire pour la surface intersection de (1), (2).

Remarquons que le cône tangent à (1) en (1, 0, 0, — 1, 0, 0) est

$$x_2 x_3 - \lambda x_5 x_6 = 0; \tag{3}$$

d'autre côté l'hyperplan tangent à (2) est

$$x_2 + x_3 - \lambda' (x_5 + x_6) = 0. \tag{4}$$

Il faut exprimer que l'hyperplan (4) est tangent à la quadrique (3).

En éliminant x_2 entre (3), (4), on obtient la quadrique

$$x_3^2 - \lambda' x_3 x_5 - \lambda' x_3 x_6 + \lambda x_5 x_6 = 0;$$

et en annullant le discriminant de cette quadrique, on trouve la condition de contact de (1), (2) sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -\lambda' & -\lambda' \\ -\lambda' & 0 & \lambda \\ -\lambda' & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut être divisée par λ ($\lambda = 0$ correspond à une variété (1) réductible à trois hyperplans), et l'on obtient

$$\lambda = \lambda'^2.$$

Cette condition ne depend pas du point 1) que nous avons choisi parmi les 9 points de notre G_9. Par conséquent elle exprime que les variétés (1), (2), correspondantes aux paramètres λ'^2, λ' se coupent suivant une surface Φ_6 qui a 9 points biplanaires en les points de G_9.

Ainsi donc Φ_6 sera notre surface hyperelliptique du type II, et on obtiendra même la surface la plus générale de cette famille dépendant d'un module arbitraire. Par suite *la surface hyperelliptique Φ_6 pourra être représentée très simplement par les équations suivantes*

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0 \\ x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \pm \sqrt{\lambda}\,(x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 . \end{cases}$$

80. *Homographies qui ramènent en elle-même la surface Φ_6.* La surface Φ_6 admet un groupe remarquable de transformations homographiques en elle-même. Nous nous proposons d'étudier ce groupe et en particulier d'établir quelques propriétés qui nous seront utiles dans la suite, pour l'analyse du type IV.

Rappelons-nous que sur la surface de Jacobi F, les transformations de 1^re^ et de 2^de^ espèce qui ramènent en lui-même le groupe des coïncidences d'une transformation quelconque T, ramènent aussi en elle-même cette transformation (n. 62).

En particulier, dans notre cas, les transformations de 1^re^ et de 2^de^ espèce qui changent en lui-même le groupe des 9 points unis de la transformation cyclique de 3^me^ ordre T, changent aussi en elle-même l'involution I_3 engendrée par T, et par suite elles donnent naissance à des transformations birationnelles entre les points de la surface Φ_6 image de I_3.

On aura ainsi sur F exactement neuf transformations de 1^re^ espèce et neuf transformations de 2^de^ espèce, parmi ces dernières étant comprise la transformation identique.

Comme les 18 transformations indiquées laissent invariant le système Σ des courbes C, elles laisseront invariant aussi le système linéaire $|D|$ renfermant les courbes $C + C' + C''$; par conséquent les transformations homologues qu'on obtient entre les points de Φ laissent invariant le système $|\Gamma|$, c'est-à-dire qu'elles sont des homographies de l'espace S_4.

En ayant égard aux propriétés des 18 transformations de 1^re^ et de 2^de^ espèce qui changent en elle-même l'involution I_3, on arrive tout de suite au théorème suivant:

La surface Φ est transformée en elle-même par les homographies d'un groupe G_{18} d'ordre 18, renfermant 9 involutions, et 8 transformations cycliques d'ordre 3 qui, avec l'identité, forment un sous-groupe G_9.

Le produit de deux homographies involutoires est une homographie de G_9, tandis que le produit d'une involution par une homographie de G_9, est encore une involution.

Le groupe des neuf points doubles et le groupe des neuf coniques appartenant à Φ sont ramenés évidemment en eux-mêmes par toute homographie du groupe G_{18}.

Nous voulons préciser quelles sont les permutations produites par ces homographies entre les points doubles et les coniques. Nous considérerons en particulier les permutations produites par une homographie involutoire du groupe G_{18}, car cela nous sera utile pour l'examen du type IV.

Il suffit de voir comment sont permutés les points et les courbes de coïncidences de la transformation T existant sur F, par une des 9 transformations de 1re espèce qui changent T en elle-même.

Soit K la transformation de 1re espèce envisagée. Elle est définie par la condition qu'un des 16 points unis de K coïncide avec un des 9 points unis de T.

Désignons ce point uni commun, par le symbole $(\alpha\alpha')$; et observons que les courbes $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$ étant tangentes en $(\alpha\alpha')$, sont correspondantes par rapport à K. De même K transforme la courbe $\alpha'\beta$ en $\alpha'\gamma$.

Il s'ensuit qu'au point $(\beta\beta')$ commun aux courbes $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ hors de $(\alpha\alpha')$, correspond le point $(\gamma\gamma')$ commun aux courbes $\alpha\gamma'$, $\alpha'\gamma$, hors de $(\alpha\alpha')$; au point $(\alpha\beta')$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ par rapport à la g_2^1 de la courbe $\alpha\gamma'$, correspond le point $(\alpha\gamma')$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ par rapport à la g_2^1 de $\alpha\beta'$; au point $(\beta\gamma')$ commun aux courbes $\alpha\gamma'$, $\alpha'\beta$, correspond le point $(\gamma\beta')$ commun aux courbes $\alpha\beta'$, $\alpha'\gamma$; etc. On trouve ainsi que K transforme les points

$$(\alpha\alpha'),\ (\beta\beta'),\ (\alpha\beta'),\ (\alpha'\beta),\ (\beta\gamma')$$

en les points

$$(\alpha\alpha'),\ (\gamma\gamma'),\ (\alpha\gamma'),\ (\alpha'\gamma),\ (\beta'\gamma);$$

et les courbes

$$\alpha\alpha',\ \beta\beta',\ \alpha\beta',\ \alpha'\beta,\ \beta\gamma'$$

en les courbes

$$\alpha\alpha',\ \gamma\gamma',\ \alpha\gamma',\ \alpha'\gamma,\ \beta'\gamma.$$

Donc:

Chacun des points doubles de Φ est uni par rapport à une involution de G_{18}. Cette involution fait correspondre deux à deux les autres points doubles. Elle laisse invariant la conique de Φ qui est conjuguée au point uni et fait correspondre deux à deux les 8 coniques restant.

Dans la suite il nous faudra aussi connaître le nombre des points de coïncidence d'une des involutions qui transforment en elle-même la surface Φ. Cela revient à chercher le nombre des groupes de l'involution I_3 de F, qui sont invariant par rapport à la transformation de 1re espèce K.

Nous avons déjà établi qu'entre les neuf groupes de I_3 formés par des points coïncidants, il y en a *un* qui reste invariant par rapport à K: c'est le groupe formé par le point uni $(\alpha\alpha')$ compté trois fois.

Cherchons maintenant s'il peut exister des groupes invariants formés par trois points distincts.

Comme K est une transformation cyclique de 2^de^ ordre, entre les trois points d'un groupe invariant, on trouvera nécessairement une coïncidence de K, et par suite les deux points restant seront aussi unis par rapport à K, car la transformation T, étant permutable avec K, doit ramener en lui-même le groupe des 16 points unis de K.

Les 15 points unis distincts du point $(\alpha\alpha')$ — qui ne sont pas unis par rapport à T, se distribuent ainsi en cinq groupes invariants de I_3.

On en conclut que sur la surface Φ l'homographie ω, *image* de la transformation K, laisse invariants six points de Φ: le point double $(\alpha\alpha')$ et cinq points *simples* de la surface.

Mais un examen plus approfondi nous montre qu'au point de vue des transformations birationnelles, le point double $(\alpha\alpha')$ est équivalent à trois coïncidences, c'est-à-dire que sur une surface dépourvue de points multiples et de courbes exceptionnelles, qui soit birationnellement identique a Φ, *la transformation correspondante à ω possède huit coïncidences distinctes.*

A cet effet il s'agit de prouver qu'entre les points de Φ infiniment voisins au point $(\alpha\alpha')$, il y en a trois qui sont unis par rapport à ω.

Remarquons d'abord que la droite d commune aux plans tangents à Φ en $(\alpha\alpha')$ doit être unie, et par suite que le point successif à $(\alpha\alpha')$ suivant la direction de cette droite, est aussi uni.

Comme l'homographie ω change la conique $\alpha\beta'$ en la conique $\alpha\gamma'$ qui touche le même plan tangent π, elle changera en lui-même ce plan tangent, et entre les droites tangentes issues par le point $(\alpha\alpha')$ sur le plan π, elle engendrera une involution non identique, un couple de cette involution étant donné par les droites distinctes r, s tangentes aux coniques $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$. Les deux droites unies de cette involution sont: la droite d et la droite d' conjuguée harmonique à d par rapport à r, s.

On trouve analoguement que l'homographie ω a une autre droite unie d'', sur l'autre plan tangent à Φ en $(\alpha\alpha')$.

On a ainsi en correspondance aux droites d, d', d'', trois points simples, successifs à $(\alpha\alpha')$, qui sont unis par rapport à ω. *C. Q. F. D.*

81. *Représentation analytique de la transformation T.* Nous voulons achever ce Ch. en étudiant de plus près la représentation paramétrique de la surface Φ.

Commençons par représenter analytiquement la transformation T d'ordre 3, qui donne naissance à cette surface.

Rapportons-nous donc à la surface de Jacobi F, que T transforme en elle-même, et tâchons d'écrire la substitution linéaire produite par T sur les intégrales normales u, v.

Ainsi que nous l'avons rappelé au n. 66, les périodes normales de u, v sont:[1]

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{matrix} \qquad \left(g\,g' = -\frac{1}{12}\right). \tag{1}$$

Soit

$$u' = \lambda u + \mu v$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v$$

la substitution linéaire représentant T; il s'agit de calculer les constantes λ, μ, λ', μ'.

Ces constantes s'expriment au moyen des périodes g, h, g' par les relations (1) du n. 45, et les quatre équations fondamentales (A), (B), (C), (D) auxquelles conduit l'élimination de λ, μ, λ', μ' entre ces relations, doivent actuellement se réduire aux relations singulières (de Humbert)

$$h = \frac{1}{2}, \quad g\,g' = -\frac{1}{12}$$

c'est-à-dire à

$$2h - 1 = 0, \quad 12\,gg' + 1 = 0.$$

En exprimant que les équations (A), (B), (C), (D) deviennent des identités pour $h = \frac{1}{2}$, $gg' = -\frac{1}{12}$, on obtient entre les 16 entiers a_i, b_i, c_i, d_i les relations

$$a_1 = b_0 = a_3 = b_2 = c_3 = d_2 = c_1 = d_0 = 0,$$
$$3(c_0 + d_1) = -(a_2 + b_3) = 2(a_0 - d_3) = 2(b_1 - c_2).$$

Ces relations, comparées aux (1) du n. 59, (caractérisant les transformations de Hermite d'ordre 1), permettent de calculer les valeurs des entiers a_i, b_i, c_i, d_i. On trouve ainsi:

$$\begin{matrix} a_0 = 1 & a_1 = 0 & a_2 = -3 & a_3 = 0 \\ b_0 = 0 & b_1 = 1 & b_2 = 0 & b_3 = -3 \\ c_0 = 1 & c_1 = 0 & c_2 = -2 & c_3 = 0 \\ d_0 = 0 & d_1 = 1 & d_2 = 0 & d_3 = -2, \end{matrix}$$

[1] Bolza «American Journal» 1888.

ou bien:

$$\begin{array}{llll} a_0 = -2 & a_1 = 0 & a_2 = 3 & a_3 = 0 \\ b_0 = 0 & b_1 = -2 & b_2 = 0 & b_3 = 3 \\ c_0 = -1 & c_1 = 0 & c_2 = 1 & c_3 = 0 \\ d_0 = 0 & d_1 = -1 & d_2 = 0 & d_3 = 1 . \end{array}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 g + a_2 h = -\frac{1}{2} \\ \mu &= b_0 + b_3 g + b_2 h = -3g \\ \lambda' &= a_1 + a_3 h + a_2 g' = -3g' \\ \mu' &= b_1 + b_3 h + b_2 g' = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\lambda = -\frac{1}{2},\ \mu = 3g,\ \lambda' = 3g',\ \mu' = -\frac{1}{2},$$

et par suite on a les substitutions linéaires périodiques d'ordre 3

$$\left|\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v' &= -3g'u - \frac{1}{2}v, \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{2}u + 3gv \\ v' &= 3g'u - \frac{1}{2}v, \end{aligned}\right.$$

qui sont l'une inverse de l'autre, ou l'une le carré de l'autre.

On remarquera que le déterminant $\frac{1}{4} - 9gg'$ de ces substitutions, est égal à l'unité. On pourra désigner par T la première parmi les substitutions que nous avons écrites; alors T^2 désignera la seconde.

Nous avons déjà démontré que la substitution T a neuf points de coïncidence (n. 73); nous pouvons maintenant retrouver ce résultat en calculant aussi les valeurs des intégrales u, v aux points de coïncidence.

Soit (u, v) un point uni de T: on aura

$$\begin{aligned} u &\equiv -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v &\equiv -3g'u - \frac{1}{2}v, \end{aligned}$$

les congruences ayant lieu par rapport aux périodes. On en tire

$$\frac{1}{2}u + g\,v = \frac{\vartheta_1}{3}$$

$$g'u + \frac{1}{2}v = \frac{\vartheta_2}{3}$$

ϑ_1, ϑ_2 étant un couple de périodes simultanées de u, v. De là on déduit

$$u = \frac{1}{2}\vartheta_1 - g\,\vartheta_2$$

$$v = \frac{1}{2}\vartheta_2 - g'\,\vartheta_1,$$

qui donnent seulement neuf couples incongrus par rapport aux périodes, c'est-à-dire les couples

$$(0\ 0),\quad \left(0\ \frac{1}{3}\right),\quad \left(0\ \frac{2}{3}\right),\quad \left(\frac{1}{3}\ 0\right),\quad \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right),\quad \left(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right),\quad \left(\frac{2}{3}\ 0\right),\quad \left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right),\quad \left(\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\right).$$

On obtient le premier couple pour $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, le second pour $\vartheta_1 = g$, $\vartheta_2 = \frac{1}{2}$, le troisième pour $\vartheta_1 = 2g$, $\vartheta_2 = 1$, etc.

82. *Équations des courbes C de Σ qui sont invariant par rapport à T.* Considérons la fonction thêta normale à caractéristique nulle, d'ordre 1, définies par les conditions fonctionnelles

$$(2)\qquad \begin{cases} \vartheta(u+1, v) = \vartheta(u, v+1) = \vartheta(u, v) \\ \vartheta(u+g, v+h) = e^{-\pi i(2u+g)}\,\vartheta(u, v) \\ \vartheta(u+h, v+g') = e^{-\pi i(2v+g')}\,\vartheta(u, v) \end{cases}$$

où les périodes appartiennent au tableau de BOLZA (n. 81). Comme il est bien connu, ces conditions déterminent *une seule fonction*, à un facteur constant près (n. 28).

La substitution hermitienne T change toute courbe C en une courbe C, c'est-à-dire toute fonction thêta de premier ordre en une fonction analogue: il s'agit de trouver, en particulier, la fonction thêta correspondante à la D normale envisagée.

On voit tout de suite que la fonction

$$\varphi(u, v) = \vartheta\left(-\frac{1}{2} - 3gv,\ -3g'u - \frac{1}{2}v\right) e^{3\pi i(3gv^2 + uv + 3g'u^2)}$$

satisfait elle-même aux conditions fonctionnelles (2). On aura par conséquent

$$\varphi(u, v) = c\, \vartheta(u, v)$$

où c est un facteur constant à calculer.

Il est aisé de prouver que $c = 1$. En effet étant $\vartheta(0, 0) \neq 0$[1], il vient

$$\varphi(0, 0) = \vartheta(0, 0) = c\, \vartheta(0, 0)$$

d'où l'on tire $\vartheta = 1$.

On a donc la relation

$$\vartheta(u', v')\, e^{3\pi i(3gv^2 + uv + 3g'u^2)} = \vartheta(u, v),$$

où l'on a posé

$$u' = -\frac{1}{2}u - 3gv$$

$$v' = -3g'u - \frac{1}{2}v.$$

En changeant u en $u - \alpha$, v en $v - \alpha'$, on obtient

$$\vartheta(u' - \beta, v' - \beta')\, e^{3\pi i[3g(v-\beta)^2 + (u-\alpha)(u-\beta) + 3g'(u-\alpha)^2]} = \vartheta(u - \alpha, v - \alpha')$$ [2]

(β, β') étant le point de F qui correspond à $(\alpha\alpha')$ par rapport à T.

Cette relation montre que *la transformation T change la courbe*

$$\vartheta(u - \alpha, v - \alpha') = 0$$

qui est une courbe quelconque C de Σ, dans la courbe

$$\vartheta(u - \beta, v - \beta') = 0$$

$(\beta\beta')$ étant le point homologue de $(\alpha\alpha')$.

Il s'ensuit que, si $(\alpha\alpha')$ est un point uni de T, l'équation

$$\vartheta(u - \alpha, v - \alpha') = 0$$

vient représenter une courbe C invariant par rapport à T.

On peut donc énoncer que:

Etant donnée une surface de Jacobi correspondante au tableau

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{vmatrix} \qquad \left(g\, g' \qquad \frac{1}{12}\right)$$

[1] Voir p. e. Humbert, Journal de Math., 1893, pag. 40.

[2] Voir Hermite, Comptes rendus 1855, t. 40, p. 366

il y a une transformation hermitienne périodique d'ordre 3

$$(\mathrm{T})\qquad \begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v' = -3g'u - \frac{1}{2}v \end{cases}$$

qui ramène la surface en elle-même; cette transformation possède neuf coïncidences en les points

$$u = \frac{\alpha}{3},\ v = \frac{\alpha'}{3} \quad (\alpha, \alpha' = 0, 1, 2)$$

et laisse invariant neuf courbes C ayant les équations

$$\vartheta\left(u - \frac{\alpha}{3},\ v - \frac{\alpha'}{3}\right) = 0,$$

où ϑ est la fonction thêta normale du 1r *ordre à caracteristique nulle.*

En poursuivant l'analyse on arrive aussi à démontrer que *la courbe*

$$\vartheta\left(u - \frac{\alpha}{3},\ v - \frac{\alpha'}{3}\right)$$

contient les quatre points unis

$$\frac{\alpha}{3}\ \frac{\beta'}{3},\quad \frac{\alpha}{3}\ \frac{\gamma'}{3},\quad \frac{\alpha'}{3}\ \frac{\beta}{3},\quad \frac{\alpha'}{3}\ \frac{\gamma}{3},$$

où $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont deux permutations des nombres 0, 1, 2.

On retrouve ainsi le symbolisme introduit par une voie différente au n. 73.

83. *Représentation paramétrique de la surface Φ_6.* La correspondance [1, 3] entre la surface Φ_6 de l'espace à quatre dimensions et la surface de Jacobi F, transforme le système linéaire découpé sur Φ par les hyperplans, dans le système linéaire

$$|D| = |C + C' + C''|$$

C', C'' étant les courbes de Σ correspondantes à une C donnée par rapport à T, T^2 (n. 75). Si

$$\vartheta(u - \alpha,\ v - \alpha') = 0$$

est l'équation de C, l'équation de $C + C' + C''$ résulte (n. préc.):

$$\vartheta(u - \alpha,\ v - \alpha')\ \vartheta(u - \beta,\ v - \beta')\ \vartheta(u - \gamma,\ v - \gamma') = 0$$

où l'on a posé:

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}\alpha - 3g\alpha' \\ \beta' = -3g'\alpha - \frac{1}{2}\alpha' \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2}\alpha + 3g\alpha' \\ \gamma' = 3g'\alpha - \frac{1}{2}\alpha'. \end{cases}$$

Soient C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 cinq positions de la courbe C telles que les cinq courbes D:

$$C_i + C'_i + C''_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

représentées par les équations

$$\Theta_i(u, v) = \vartheta(u - \alpha_i, v - \alpha'_i)\,\vartheta(u - \beta_i, v - \beta'_i)\,\vartheta(u - \gamma_i, v - \gamma'_i) = 0$$
$$(i = 0, 1, \ldots 4)$$

résultent linéairement indépendantes. Comme toute courbe du système $|D|$ est linéairement dépendante des cinq courbes fixées, l'équation d'une courbe D quelconque aura la forme

$$\lambda_0 \Theta_0(u, v) + \lambda_1 \Theta_1(u, v) + \cdots + \lambda_4 \Theta_4(u, v) = 0.$$

Dans l'espace S_4 de Φ_6 prenons comme hyperplans d'équations

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \ldots x_4 = 0$$

les cinq hyperplans qui renferment les courbes Γ répondant aux courbes $C_i + C'_i + C''_i$.

On obtient alors les formules

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, \ldots 4)$$

qui donnent la représentation de la surface Φ_6 au moyen des paramètres u, v.

IX. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 4 (type III).

84. — *Transformations hermitiennes périodiques d'ordre quatre.* — Soit τ une transformation singulière, cyclique d'ordre 4, appartenant à la courbe de genre deux f. La surface de Jacobi F attachée à f, possède une transformation hermitienne T (correspondante à τ) appartenant à une série continue ∞^2 de transformations semblables.

Des propriétés de τ on déduit tout de suite les propriétés de T. Cherchons en particulier le nombre des points de coïncidence de la transformation T. On doit chercher combien y a-t-il de couples de points de f, qui soient changés en eux-mêmes par τ. Remarquons que τ laisse invariant deux points M, N de f, qui sont aussi unis par rapport à la g_2^1 de f, et que les quatre points unis restant de la g_2^1, se distribuent en deux couples de points homologues $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ par rapport à la τ; on obtient ainsi les couples unis

$$2M,\ 2N,\ M+N,\ A_1+A_2,\ B_1+B_2.$$

Partant sur la surface F il y a quatre points de coïncidence de la transformation T, car la F, étant toujours supposée dépourvue de courbes exceptionnelles, les couples $2M$, $2N$ sont représentés par un même point de F (n. 5).

Comme la transformation τ^2 coïncide avec la correspondance déterminée par la g_2^1 entre les points de f, la transformation T^2 de F sera une transformation K de la 1re espèce.

Cette transformation K possède 16 points unis, dont quatre tombent en les points unis de T; les 12 qui restent correspondent aux couples de points de f:

$$A_1+M,\ A_2+M;\ A_1+N,\ \ A_2+N;\ \ B_1+M,\ \ B_2+M$$
$$B_1+N,\ B_2+N;\ A_1+B_1,\ A_2+B_2;\ A_1+B_2,\ A_2+B_1.$$

On a ainsi 6 couples de points de F qui forment des cycles d'ordre 2 par rapport à T.

Envisageons maintenant le système Σ qui contient totalement les courbes C de F correspondantes aux séries des couples de f qui renferment un point fixé; tâchons de déterminer les courbes de Σ qui sont invariantes par rapport à T et les liens entre ces courbes et les points unis de la même transformation. Il nous sera ici très utile le symbolisme introduit par M. Humbert (n. 46). Désignons donc par $(\alpha\alpha')$ et respectivément par $\alpha\alpha'$ — où $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $\alpha' = 1', 2', 3', 4'$ — les points et les courbes invariants par rapport à la transformation de la 1re espèce K. Soit $(11')$ un des 4 points unis qui sont aussi invariants par rapport à T, et H le système de courbes C issues par $(11')$.

La transformation T établit entre les éléments (courbes) de la variété H, une correspondance singulière cyclique d'ordre 4, parfaitement analogue à la transformation τ donnée sur la courbe f.

Rappelons-nous que les couples de courbes C issues par $(11')$ et conjuguées par rapport à K, forment la g_2^1 appartenant à la variété de genre deux H qui a pour éléments ces ∞^1 C; il s'ensuit que parmi les six courbes

$$12', 13', 14', 1'2, 1'3, 1'4$$

passant par le point envisagé et unies par rapport à K, deux seront aussi unies par rapport à T et les quatre restant se partegeront en deux cycles de 2[d] ordre par rapport à cette dernière transformation.

Soient $12'$, $1'2$ les courbes unies, et

$$13', 1'3;\ 14', 1'4$$

les deux cycles d'ordre 2. Il s'ensuit que les points $(22')$, $(33')$, $(44')$ où se coupent ces couples de courbes hors du point $(11')$, sont des points unis par rapport à T. On considérera alors la correspondance établie par T entre les courbes C passant par $(22')$, et on trouvera deux nouveaux cycles de 2[d] ordre de la transformation T. Ce raisonnement pouvant être répété pour les autres points unis, on arrivera à la conclusion qui est exprimée par le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 2[d] ordre
$(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$	$(12')$, $(1'2)$; $(13')$, $(2'4)$; $(14')$, $(2'3)$; $(23')$, $(1'4)$; $(24')$, $(1'3)$; $(34')$, $(3'4)$.

Courbes C

unies	cycles de 2[d] ordre
$12'$, $1'2$, $34'$, $3'4$	$13'$, $1'3$; $14'$, $1'4$; $23'$, $2'3$; $24'$, $2'4$; $11'$, $22'$; $33'$, $44'$.

On voit de suite que les cycles de 2[d] ordre formés par les points ou par les courbes de notre tableau ne jouent pas un rôle symétrique.

On a en effet quatre cycles de points, c'est-à-dire les cycles

$$(13'), (2'4);\ (14'), (2'3);\ (23'), (1'4);\ (24'), (1'3) \tag{1}$$

qui appartiennent à des courbes unies, tandis que les cycles restant

$$(12'), (1'2);\ (34'), (3'4), \tag{2}$$

n'appartiennent à aucune courbe unie. Analoguement on a quatre cycles de courbes

$$13', 1'3;\ 14', 1'4;\ 23', 2'3;\ 24', 2'4, \tag{3}$$

qui passent par des points unis, tandis que les cycles

(4) $11', 22'; \quad 33', 44'$

ne jouissent pas de cette propriété.

Les cycles (1), (3) seront nommés *cycles de rang* 1, et les cycles (2), (4) *cycles de rang* 2.

85. — *L'involution I_4 engendrée par la transformation T et la surface Φ_8, d'ordre 8, qui en donne l'image projective.* — Considérons l'involution engendrée sur la surface de Jacobi F par la transformation T; c'est-à-dire l'involution dont un groupe quelconque est formé en associant à un point P de F les points P', P'', P''' correspondants à P par rapport à T, T^2, T^3.

En suivant la même marche qu'aux n. 75 on établit tout de suite:

1) Que l'involution I_4 possédant un nombre fini de points de coïncidence (c'est-à-dire quatre points 4-ples et douze points doubles, donnant six groupes de I_4), toute surface Φ qui représente birationnellement les groupes de I_4, est régulière.

2) Que dans la correspondance [1, 4] entre les surfaces Φ, F, au système linéaire $|D|$ appartenant à l'involution I_4 et renfermant totalement la courbe $C+C'+C''+C'''$ (où C', C'', C''' sont les transformées de C par rapport à T, T^2, T^3) correspond sur Φ un système linéaire simple $\infty^2|\Gamma|$, dépourvu de points-base, ayant le genre 5 et le degré 8.

La variété ∞^2 des groupes de I_4 pourra donc être représentée par une surface Φ_8 de l'espace S_2 de façon que le système linéaire complet $|\Gamma|$ soit decoupé sur Φ_8 par les hyperplans de S_2.

Comme sur une surface régulière, telle que Φ_8 tout système linéaire complet a la série caractéristique complète, la dimension r du système $|\Gamma|$, c'est-à-dire de l'espace renfermant Φ_8, sera égale à 5 ou à 4 suivant que cette série caractéristique sera la série canonique ou bien une série non-speciale; le premier cas aura lieu si le genre de la surface $p_g=1$, le second si $p_g=0$.

On verra dans la suite que $p_g=1$ et par conséquent $r=5$.

86. — *Relations entre la surface Φ_8 et la surface de Kummer attachée à la même courbe de genre 2.* — *Genre de la surface Φ_8.* — Pour calculer la valeur du genre de Φ_8, remarquons d'abord que:

On peut établir une correspondance birationnelle entre les points de la surface Φ_8 et les couples d'une certaine involution I_2 appartenant à la surface de Kummer ψ qui est attachée à la courbe de genre deux f.

En effet les points P, P', P'', P''' d'un groupe de I_4 se distribuent en deux couples P, P'' et P', P''' de points homologues par rapport à la transformation

de 1re espèce $K \equiv T^2$, de sorte qu'à tout groupe de I_4 répondent deux groupes de l'involution I_2 engendrée par K, et réciproquement à tout groupe de I_2 répond un seul groupe de I_4. Comme les surfaces Φ, ψ dont on parle ci-dessus, sont birationnellement identiques aux variétés I_4, I_2 on aura entre les points de ces surfaces une correspondance faisant répondre à un point de Φ, deux points de ψ, et à un point de ψ, un seul point de Φ $C.Q.F.D.$

On dira que la correspondance involutoire qu'on a entre deux points de ψ correspondant à un même point de Φ, est l'image de la correspondance T qu'on a établi sur la surface F.

On démontre de plus que *l'involution d'ordre 2 que nous avons définie sur la surface de Kummer ψ, est engendrée par une homographie involutoire qui transforme en elle-même la surface ψ, et laisse invariant quatre points doubles de celle-ci.*

Pour établir cette proposition, il faut remarquer d'abord que dans la correspondance [1, 2] entre les points de la surface de Kummer ψ et de la surface de Jacobi F, aux sections planes de ψ répondent les courbes d'un système linéaire $|G|$ renfermant totalement la courbe $C + C''$ ainsi que la $C' + C'''$.

Comme la transformation T change la courbe $C + C''$ en $C' + C'''$, la correspondance involutoire, ω, image de T, changera la section plane de ψ répondant à $C + C''$, dans la section répondant à $C' + C'''$, et par suite elle changera en lui-même le système (complet) des sections planes de ψ. On en conclut que ω est une homographie (involutoire).

Les points de ψ qui sont unis par rapport à ω répondent aux groupes de l'involution I_2, engendrée par K, qui demeurent invariant par rapport à T. En se rappelant que $K \equiv T^2$, on voit tout de suite que les seuls groupes de K qui restent invariant par rapport à T, sont formés par les points unis $(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$, dont chacun doît être compté deux fois.

Comme à ces groupes de points coïncidant répondent quatre des 16 points doubles de la surface ψ on arrive ainsi à la conclusion énoncée.

Ceci posé, remarquons que l'homographie ω (par laquelle vient définie I_2 sur ψ) ne saurait être une homologie, car autrement on aurait sur ψ une courbe de points de coïncidences; pourtant ω sera une homographie harmonique à deux axes, et ces axes seront les deux côtés opposés du quadrilatère gauche formé par les quatre points unis nommés ci-dessus.

Or d'après le lemme que nous avons établi au n. 38 on pourra calculer le genre $(p_a = p_g)$ de Φ en déterminant s'il y a, ou s'il n'y a pas, des points de coïncidence de l'involution I_2 sur ψ; on aura

$$p_a = p_g = 1$$

dans la première hypothèse, tandis que la seconde hypothèse amenerait à

$$p_a = p_g = 0.$$

On dirait au premier abord qu'il existe sur ψ quatre coïncidences de I_2 tombant dans les quatre points doubles qui se trouvent sur les deux axes de ω.

Mais il ne faut pas oublier qu'au point de vue des transformations birationnelles, un point double conique doît être considéré comme une courbe rationnelle (de degré -2), de sorte que les points de cette courbe qu'on aurait sur une transformée convenable de la surface, répondent aux points appartenant au domaine du point double, ou, si l'on veut, aux génératrices du cône tangent.

On aura donc à chercher le nombre des génératrices des quatre cônes tangents, qui restent invariant par rapport à ω. Soit M un point double uni et n l'axe de l'homographie ω qui ne renferme pas M; on voit que les deux droites tangentes en M à la surface ψ et appuyées à l'axe n, sont les seules génératrices du cône tangent, qui restent invariant par rapport à ω. L'involution I_2 engendrée par ω sur ψ possède donc $4.2 = 8$ coïncidences, et par suite *la surface* Φ_8 *a le genre* $p_a = p_g = 1$.

On en déduit que *la surface normale* Φ_8, *d'ordre* 8, *appartient à un espace à cinq dimensions* (n. 92).

87. — **Remarque.** — Dans le raisonnement qui précède, le lemme du n. 38 nous conduit à la conclusion que le genre de Φ est > 0, et par conséquent $= 1$, aussitôt que l'on a reconnu qu'il y a $x > 0$ points de coïncidence de I_2. Il est intéressant de remarquer qu'on peut calculer directement le genre numérique $p_a (= p_g)$ de Φ en fonction du nombre x, d'après le procédé suivant.

Considérons en général une surface ψ de genre numérique P_a, renfermant une involution I_2; soit x le nombre des points de coïncidence de I_2 (nombre qu'on suppose fini, ≥ 0) et soit p_a le genre numérique de cette involution, ou d'une surface Φ qui en fournit une image.

Remarquons d'abord que les coïncidences de I_2 sont nécessairement *parfaites*, c'est-à-dire que dans le domaine de tout point uni on a une homographie identique.

Supposons en effet que dans le domaine du point uni U on ait une involution possédant deux coïncidences, et désignons par $|A|$ un système linéaire quelconque tracé sur ψ et par $|A'|$ le système transformé de $|A|$ par rapport à I_2. Soit $|B|$ le système linéaire *appartenant à l'involution* I_2, et renfermant les courbes réductibles $A + A'$. Une courbe B quelconque que l'on oblige à passer par U, passera nécessairement par ce point avec deux branches tangentes à deux

directions distinctes; et celles-ci seront conjuguées par rapport à l'involution qui résulte définie dans le domaine de U. On en déduit que l'involution d'ordre 2 appartenant à la courbe considérée B, n'aura pas des coïncidences, car à un point qui se meut sur B s'approchant à U sur l'une des deux branches de la courbe, correspond en I_2 un point qui se meut sur l'autre branche. Or on a sur B une involution γ_2^1 (formée par les couples de I_2) dont on pourra désigner le genre par ϱ; en désignant par ϱ' le genre (effectif) de B on a la formule bien connue de M. ZEUTHEN

$$4(\varrho - 1) = 2(\varrho' - 1) \quad \text{d'où } \varrho' = 2\varrho - 1.$$

Comme la B que nous avons considérée possède un point double en U, le genre effectif d'une B arbitraire ne passant pas par U sera $\varrho' + 1 = 2\varrho$. Mais c'est là une conclusion absurde, car cette B renferme aussi une involution sans coïncidences, formée par les couples de I_2, et en appliquant à celle-ci la formule de Zeuthen, on trouve que le genre de la courbe est un nombre impair.

Ceci posé considérons la correspondance [1 2] entre les surfaces Φ, ψ (Φ étant une image de I_2). On déduit aisément de ce qui précède, qu'aux points unis de I_2 répondent sur Φ des courbes rationnelles de degré -2. On a alors tous les éléments pour écrire la relation, que M. SEVERI a établie, entre les genres arithmétiques de deux surfaces en correspondance algébrique; cette relation sera

$$x + 4P_a = 8p_a + 4.$$

Dans le cas particulier qui nous interesse ici, on a $P_a = 1$; la formule précédente nous donne alors

$$p_a = 1, \quad x = 8$$

ou bien

$$p_a = 0, \quad x = 0$$

(le cas $x < 0$, qui répondrait à une involution I_2 douée d'une infinité de coïncidences, est ici écarté à priori).

Par cette remarque se trouve établi le théorème suivant qui renferme celui que nous avons établi au n. 38.

Soit I_2 une involution d'ordre 2, appartenant à une surface de genre numérique 1, et possédant un nombre fini $x\,(>0)$ de coïncidences; le genre numérique de I_2 est

$$p_a = 0 \quad ou \quad p_a = 1,$$

et on a respectivement

$$x = 0 \quad ou \quad x = 8.$$

En nous rapportant à la I_2 donnée sur une surface de Kummer (I_2 qui est représentée par la surface hyperelliptique Φ_8) nous avons trouvé effectivement

$$x = 8;$$

ainsi la déduction $p_a = 1$ se trouve confirmée.

88. — *Configuration des points doubles et des courbes rationnelles appartenant à la surface* Φ_8. — Considérons sur la surface de Jacobi F les 10 groupes de l'involution I_4, qui renferment des points multiples, c'est-à-dire les 4 groupes formés par des points quadruples et les six groupes formés par les cycles de 2^d ordre, dont chacun soit compté deux fois (n. 84). A ces groupes répondent 10 points singuliers de la surface Φ_8, formant une configuration remarquable que nous nous proposons d'étudier.

De même que sur F les relations essentielles entre les points unis de la transformation T, se rapportent aussi aux courbes C unies, sur la surface Φ, la cfg. des points singuliers résultera étroitement liée à la cfg. formée par les courbes répondant aux courbes unies.

On voit tout d'abord que cette dernière cfg. contient: quatre coniques, répondant aux courbes unies $12'$, $1'2$, $34'$, $3'4$; quatre courbes de quatrième ordre (que nous dirons de *rang* 1) répondant aux cycles de rang 1; et deux courbes de 4^me ordre (que nous dirons de *rang* 2) répondant aux cycles de rang 2. On démontre aisément que les six courbes de 4^me ordre sont rationnelles.

Ainsi p. e. la courbe répondant au cycle $13'$, $1'3$, est rationnelle car ses points sont en correspondance birationnelle avec les groupes de la série g_2^1, déterminée sur la courbe $13'$ (ou $1'3$) par la transformation $T^2 \equiv K$.

On peut aussi ajouter qu'il existe 4 hyperplans qui touchent Φ le long des quatres coniques avec un contact de 3^me ordre, et six hyperplans touchant Φ le long des six quartiques avec un contact de 1^r ordre. En effet toute conique comptée 4 fois, doit donner une courbes du système *complet* $|\Gamma|$ coupé sur Φ par les hyperplans, car une des courbes unies $12'$, $1'2$, $34'$, $3'4$ comptée 4 fois donne sur F une courbe D; et analoguement pour les quartiques.

Après ces remarques relatives à la cfg. des courbes rationnelles, passons à examiner la nature des 10 points singuliers.

Démontrons d'abord que ces points ne sauraient être multiples d'un ordre > 2.

On a plus généralement que: *une surface régulière normale des genres* $p_a = p_g = P_2 = 1$, *dépourvue de courbes exceptionnelles, ne peut pas posséder des points multiples d'ordre* > 2.

Rappelons que toute surface normale de genres 1, dépourvue de courbes exceptionnelles, jouit des propriétés suivantes:

a) elle appartient à un espace S_r dont la dimension r est égale au genre r des sections hyperplanes (canoniques) de la surface;

b) elle est d'ordre $2r-2$;

c) elle ne possède pas des courbes multiples ou des points multiples n'abaissant pas le genre des sections hyperplanes.

Si la surface renferme un point multiple O, en la projetant de O on obtiendra une nouvelle surface de S_{r-1} qui ne contient pas des courbes exceptionnelles[1] de sorte que cette projection devra satisfaire aux propriétés a) et b); il s'ensuit que le point multiple O ne saurait pas être d'ordre >2.

Remarque. — *On voit de plus que les points doubles de la surface de genres* 1, *abaissent le genre des sections hyperplanes d'une seule unité.*

Ceci posé revenons à notre surface Φ_8 de l'espace S_5.

Appelons P le point de Φ répondant au point uni $(11')$ de F. Des 10 courbes rationnelles appartenant à Φ, il y en a quatre qui passent par P: c'est-à-dire les coniques homologues aux courbes unies $12'$, $1'2$, et les quartiques de rang 1 répondant aux cycles de rang 1, $13'$, $1'3$ et $14'$, $1'4$ (voir le tableau du n. 84).

Comme une section hyperplane arbitraire issue par P, coupe chaque conique hors de P en *un seul point*, sur la surface F une courbe D issue arbitrairement par $(11')$ coupera les courbes $12'$, $1'2$, hors de $(11')$, *en quatre points*, dé sorte qu'elle aura quatre intersections avec ces courbes, réunies en $(11')$. On en conclut que le point $(11')$ est un point de multiplicité $s \geq 2$ pour la courbe D envisagée. Mais dans l'hypothèse $s>2$ deux courbes D arbitraires issues par $(11')$ auraient t intersections réunies en $(11')$, où

$$t > s^2 \geq 9,$$

et par suite deux sections hyperplanes de Φ, issues par P, auraient $\frac{t}{4}>2$ intersections réunies en P, et ce point résulterait de multiplicité >2. En vertu de la proposition établie ci-dessus, on en déduit que $s=2$.

En tenant compte de ce que la D envisagée a quatre intersections réunies en $(11')$, avec les courbes $12'$, $1'2$, on reconnait que les deux branches de D passant par $(11')$, doivent avoir respectivement un contact de 2[d] ordre avec les courbes susdites. On peut exprimer cette propriété en disant que les courbes D issues par P forment un système linéaire ayant le point-base double P et deux

[1] En effet le genre des sections hyperplanes étant $\pi' \leq r-1$, on en déduit $\pi'=r-1$ $(pg>0)$; cette égalité ne saurait subsister s'il y avait sur la surface des courbes exceptionnelles parce qu'en ce cas on aurait $\pi'>r-1$.

points base simples successifs sur chacune des courbes $12'$, $1'2$. (Voir la figure.) Ce système linéaire, que nous désignerons par $|D_1|$, est formé par les courbes D de F répondant aux sections hyperplanes de Φ, qui passent par P.

Supposons maintenant qu'un point M de F, se mouvant sur la courbe $13'$, s'approche à $(11')$, et considérons les ∞^3 courbes de $|D_1|$ qui passent par M, courbes que nous nommerons D_2. Comme le système $|D_1|$ appartient à l'involution I_4, ces courbes que nous avons obligées à passer par M, passeront en conséquence par les points M', M'', M''' homologues à M en T, T^2, T^3. En se rappelant que $T^2 \equiv K$, on déduit que le point M'' se meut sur $13'$, tandis que les points M', M''' se meuvent sur $1'3$. De là on tire qu'à la limite, lorsque M coïncide avec $(11')$, les courbes D_1 envisagées viennent avoir au moins deux nouvelles intersections réunies en $(11')$ avec les courbes $13'$, $1'3$, de sorte qu'elles ont avec ces courbes au moins quatre intersections, tombant en $(11')$. Comme les D_1 ont aussi *quatre* intersections en $(11')$ avec les courbes $12'$, $1'2$, il s'ensuit que le point $(11')$ est quadruple pour les ∞^2 courbes D_2.

On pourrait douter que les D_2 aient en $(11')$ un point multiple d'ordre > 4; mais on se passe de ce doute en observant que la courbe $C + C' + C'' + C'''$ composée d'une C passant par $(11')$ et de ses transformées par rapport à T, T^2, T^3, est une particulière D_2 qui possède en $(11')$ un point quadruple. On voit de plus que les D_2 n'ont pas des tangentes fixes en $(11')$, car la courbe $C + C' + C'' + C'''$ envisagée, a ses tangentes variables au varier de C.

Aux courbes D_2 répondent sur Φ les sections hyperplanes d'un système linéaire ∞^3 contenu dans le système ∞^4 des sections hyperplanes qui passent par P, c'est-à-dire les sections produites par des hyperplans renfermant une certaine droite p par P.

Comme le genre de ces sections doit être égal à la dimension 3 du système complet auquel elles appartiennent, on arrive à la conclusion que la surface possède un point double P_1 infiniment prochain à P, suivant la direction p. Si l'on ajoute qu'une section hyperplane arbitraire par P, passe par ce point avec deux branches non tangentes entre elles — répondant aux branches d'une courbe D_1 en $(11')$ — on en déduit que le point P est biplanaire et que p est la droite commune aux deux plans tangents.

La circonstance que les courbes D_2, répondant aux sections hyperplanes par p, ont les quatres tangentes variables, nous montre aisément qu'il ne peut pas exister un troisième point double P_2, successif à P_1.

On peut aussi établir tout de suite le comportement en P des quatre courbes rationnelles passant par ce point. Il suffit à cet effet de rappeler les propriétés des courbes D_1, D_2 au point $(11')$.

Ainsi p. ex. de ce que les D_1, D_2 ont quatre intersections en $(11')$ avec les $12'$, $1'2$, on déduit que les coniques répondant à $12'$, $1'2$ passent par P d'une façon telle que chacune d'elles touche un des deux plans tangents et non la droite p; etc. etc.

Passons maintenant à étudier la nature du point Q de Φ qui répond au cycle de rang 1: $(13')$, $(2'4)$. Une courbe D issue d'une façon arbitraire par le point $(13')$ doit passer en conséquence par $(2'4)$; il s'agit d'établir les propriétés de cette D dans le domaine de $(13')$ et de $(2'4)$. A ce but remarquons que par Q passent les coniques répondant aux courbes $12'$, $3'4$, et qu'une section hyperplane par Q coupe ces coniques, hors de Q, en un seul point. Il s'ensuit qu'une D par $(13')$, $(2'4)$ doit avoir deux intersections avec les courbes $12'$, $3'4$ en chacun des points $(13')$, $(2'4)$, et par suite que la D doit avoir un point double en $(13')$ et un autre point double en $(2'4)$.

Soit $|D_1|$ le système linéaire ∞^4 formé par les courbes D répondant aux sections hyperplanes par Q. On voit aisément que les D_1 ont en $(13')$, $(2'4)$ les deux couples de tangentes variables, car en transformant au moyen de T, T^2, T^3 une courbe C issue par $(13')$, on obtient une particulière D_1 ayant les tangentes variables. En poursuivant l'analyse on établit que le point Q est un point double conique.

Ce résultat découle des remarques suivantes:

1) Une section hyperplane arbitraire passant par Q, possède un point double origine de deux branches *non tangentes* correspondantes aux branches de la courbe homologue D_1 par $(13')$, $(2'4)$.

2) Les points de Φ appartenant au domaine de Q, forment une variété algébrique irréductible, car ils correspondent biunivoquement aux couples de l'involution formée par les tangentes des courbes D_1 en $(13')$, $(2'4)$.

On conduit d'une façon parfaitement analogue la discussion relative au point R de Φ, correspondant à un cycle de rang 2, tel que $(12')$, $(1'2)$. On arrive de même à la conclusion que R est un point double conique.

Pour compléter la recherche des relations qui passent entre les 10 courbes rationnelles et les points doubles de Φ, il suffira de remarquer que toute relation entre les courbes et les points unis sur F, se transporte sans aucune difficulté aux éléments singuliers de Φ.

En résumant on arrive à la conclusion suivante:

Toute surface hyperelliptique de rang 4 et du type III, peut être transformée birationnellement en une surface Φ_8 de genres 1 appartenant à l'espace à cinq dimensions, et possédant des sections hyperplanes d'ordre 8 et de genre 5.

La Φ_8 jouit des propriétés suivantes: Elle possède 10 *points doubles et* 10 *courbes rationnelles remarquables.* Des 10 points doubles quatre sont biplanaires et les six restant sont coniques. Dans le domaine de 1r ordre de tout point biplanaire on a un autre point double.

Les points doubles coniques se partagent en deux classes jouissant de propriétés différentes: 4 points coniques de rang 1 et 2 de rang 2. Des 10 courbes rationnelles quatre sont des coniques et six des quartiques. Le long de toute conique il y a un hyperplan ayant avec Φ_8 un contact d'ordre 3, et le long d'une quartique un hyperplan ayant un contact simple. Les quartiques se partagent en deux classes: 4 de rang 1 et 2 de rang 2.

Les 10 points doubles et les 10 courbes satisfont aux relations qui suivent:

Par un point biplanaire passent 2 coniques et 2 quartiques de rang 1.

Par un point conique de rang 1 passent 2 coniques, 2 quartiques de rang 1 et les 2 quartiques de rang 2.

Par un point conique de rang 2 passent les 4 quartiques de rang 1 et 1 de rang 2.

Une conique renferme 2 points biplanaires et 2 points coniques de rang 1.

Une quartique de rang 1 renferme 2 points biplanaires, 2 points coniques de rang 1 et les 2 de rang 2.

Une quartique de rang 2 renferme les 4 points coniques de rang 1 et passe doublement par 1 point conique de rang 2.

89. — *La surface Φ_8 caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers.* — Soit une surface Φ_8, d'ordre 8 à sections canoniques en S_5 ($p_a = p_g = P_2 = 1$), possédant 10 points doubles et 10 hyperplans tangents suivant des courbes rationnelles, de façon que ces points et ces courbes forment une cfg. jouissant des propriétés établies au n. précédent. On peut démontrer que Φ_8 est une surface hyperelliptique du type III, de façon que *la configuration que nous avons définie joue un rôle caractéristique par rapport à cette surface.*

A cet effet nous procéderons par une méthode analogue à celle que nous avons développée aux nn. 49, 78.

Nous tâcherons de construire une surface birationnellement identique à la surface de Kummer, qui soit représentée sur la Φ_8 comptée deux fois.

Faisons d'abord les remarques suivantes.

Ainsi que nous l'avons expliqué au n. 86, la surface Φ_8 correspond à une involution I_2 d'ordre 2 appartenant à une surface de Kummer. Transformons celle-ci en faisant correspondre aux quadriques de S_3 les hyperplans de S_9; on aura ainsi une surface ψ_{16} de S_9 possédant 16 points doubles et 16 S_8 tangents suivant des courbes rationnelles d'ordre 4.

La surface ψ_{16} transformée de la surface de Kummer renferme une involution I_2 qui est engendrée par une homographie de S_9. Cette homographie possède un S_3 de points unis ne rencontrant pas ψ_{16}; et de cet espace S_3 la surface vient projetée en notre Φ_8.

Ceci posé nous allons montrer comment on peut construire réciproquement ψ_{16} étant donnée Φ_8.

A cet effet remarquons que parmi les 4 hyperplans tangents à Φ_8 suivant les quartiques de rang 1, on peut choisir deux hyperplans ayant communs 4 points coniques, et renfermant dans leur ensemble les 4 points biplanaires.

Supposons que de tels hyperplans soient représentés par

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Construisons la surface de S_6

$$(1) \qquad y_1 = x_1, \ldots y_6 = x_6, \quad y_7 = \sqrt{x_1 x_2}$$

($x_1, \ldots x_6$ satisfaisant aux équations de Φ_8). Comme la quadrique de diramation $x_1 x_2 = 0$ est tangente à la surface double, Φ_8, il n'y aura pas sur celle-ci des courbes de diramation proprement dites; par conséquent la surface (1) que nous venons de construire est d'ordre 16, et ses sections hyperplanes sont de genre 9 et se coupent deux à deux en des groupes canoniques: il s'ensuit que cette surface a tous les genres géométriques égaux à 1 $p_g = P_2 = \cdots = 1$). Or il y aura une surface normale d'ordre 16 (que nous désignerons par ψ) dont la surface (1) de S_6, est une projection.

Nous voulons prouver: d'abord que le genre numérique de ψ [ou de (1)] est $p_a = 1$ et par conséquent que ψ appartient à un S_9; ensuite que ψ est identique à la surface ψ_{16} que nous avons obtenue en transformant une surface de Kummer.

A cet effet faisons les remarques suivantes:

1) Un point biplanaire de Φ_8 appartient à un des deux hyperplans de diramation $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, de sorte que le domaine de ce point sur chaque nappe de la surface donne lieu à une courbe de diramation infiniment petite.

2) Les points coniques communs à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, sont doubles pour la quadrique de diramation $x_1 x_2 = 0$; on voit donc qu'il n'y a pas des points de diramation dans le domaine de ces points coniques.

3) Il en est de même pour les deux points coniques de Φ_8 qui n'appartiennent pas à la quadrique $x_1 x_2 = 0$.

Ceci posé on voit d'abord qu'aux 16 points coniques de Φ_8 correspondent autant de couples de points coniques de ψ, ce qui fait 12 points doubles coniques de cette surface.

A chaque point biplanaire (de diramation) de Φ_8 répondra un point de ψ, et nous supposerons qu'il s'agisse d'un point singulier abaissant la classe de la surface d'un certain nombre $h\,(>0)$.

Or en répétant le raisonnement que nous avons développé aux nn. 49, 78, tâchons d'évaluer l'invariant de Zeuthen-Segre de la surface ψ. Ce calcule nous amène à l'équation

$$4 + 4h = 12\,p_a$$

p_a désignant le genre numérique de ψ.

Cette équation doit être résolue en nombres entiers, et on doit avoir

$$h \geq 0, \quad p_a \leq 1;$$

pourtant on aura

$$h = 2, \quad p_a = 1.$$

Il s'ensuit qu'aux 4 points biplanaires de Φ correspondent 4 points doubles coniques de ψ.

Nous venons de prouver que *la surface ψ est une surface de genre $p_a = 1$ possédant 16 points doubles coniques.* Il est aisé de reconnaître qu'elle possède aussi 16 S_8 tangents suivant des quartiques C_4.

Ces courbes C prennent naissance de la façon suivante:

1) Chaque quartique de Φ_8 donne lieu à deux C_4 (ce qui fait 12 C_4). En effet on peut reconnaître qu'une telle quartique ne renferme pas des points de diramation.
2) Chaque conique de Φ_8 donne lieu à une courbe irréductible d'ordre 4, parce qu'il y a sur la conique deux points de diramation. On a ainsi 4 C_4 à ajouter aux 12 déjà trouvées.

Ceci posé on voit que *la surface ψ de S_9 est une transformée de la surface de Kummer;* le système transformant est le système linéaire auquel appartiennent les 16 quartiques de ψ comptées deux fois.

X. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 6 (type IV).

90. — *L'involution I_6 engendrée par une transformation hermitienne cyclique d'ordre 6.* — Sur la surface de Jacobi F considérons la transformation hermitienne T périodique d'ordre 3, envisagée au n. 73, et désignons par K la transformation ordinaire de 1re espèce qui laisse invariant un des 9 points unis de T. On remarquera tout d'abord que les transformations T, K sont échangeables, car T doit transformer K en elle-même (voir le n. 62).

La transformation hermitienne singulière

$$S \equiv T K \equiv K T$$

résulte par conséquent périodique d'ordre 6, car on a

$$S^6 \equiv T^6 K^6 \equiv 1.$$

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre les surfaces représentant l'involution I_6, engendrée sur F par la transformation S.

En parcourant la marche suivie dans les cas précédénts, on aura d'abord à chercher les points et les courbes C qui restent invariant par rapport à la transformation S ou à une de ses puissances, les C étant courbes d'un système Σ.

A ce but il faut chercher:

a) La permutation produite par K entre les points et les courbes C invariant par rapport à T.

b) La permutation produite par T entre les points et les courbes C invariant par rapport à K.

La première recherche a été déjà effectuée au n. 80. En désignant par $(\alpha\alpha')$ le point uni de T, qui est aussi uni par rapport à K, on a trouvé que K transforme les points

$$(\alpha\alpha'), \quad (\beta\beta'), \quad (\alpha\beta'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\beta\gamma')$$

en les points

$$(\alpha\alpha'), \quad (\gamma\gamma'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\gamma), \quad (\beta'\gamma),$$

et les courbes

$$\alpha\alpha', \quad \beta\beta', \quad \alpha\beta', \quad \alpha'\beta, \quad \beta\gamma'$$

en les courbes

$$\alpha\alpha', \quad \gamma\gamma', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\gamma, \quad \beta'\gamma.$$

Passons donc maintenant à la recherche b). Désignons les courbes et les points unis de K au moyen des symboles de M. HUMBERT, en combinant les deux séries de caractères

$$a, \ b, \ c, \ d \quad \text{et} \quad a', \ b', \ c', \ d'.$$

Soit $(aa') = (\alpha\alpha')$ le point uni de K, qui est aussi uni par rapport à T. Entre les éléments de la variété ∞^1 formée par les C qui passent par (aa'), il y a une transformation singulière périodique d'ordre 3 définie par S; partant les six courbes unies de K:

$$ab', \quad ac', \quad ad', \quad a'b, \quad a'c, \quad a'd$$

qui passent par (aa'), se partageront en deux cycles de la transformation T:

$$ab', \quad ac', \quad ad' \quad \text{et} \quad a'b, \quad a'c, \quad a'd.$$

Ceci posé, on voit tout de suite que la T fait correspondre au point $(b b')$ le point $(c c')$ et à ce dernier le point $(d d')$, car $(b b')$ peut être envisagé comme le point commun aux courbes $a b'$, $a' b$, hors de $(a a')$; le point $(c c')$ comme le point commun aux courbes $a c'$, $a' c$ correspondantes aux courbes précédentes, et enfin le point $(d d')$ comme l'intersection, hors de $(a a')$, de deux courbes $a d'$, $a' d$.

En poursuivant l'analyse par des considérations analogues, on arrive à la conclusion que les termes de points

$$\begin{array}{llll} (a a') & (a a') & (a a') - (b b')(c c')(d d') - (a b')(a c')(a d') \\ (b c') & (c d') & (d b') - (c b')(d c')(b d') - (c a')(d a')(b a'), \end{array}$$

et les termes de courbes ayant les mêmes symboles, forment des cycles de la transformation T.

En résumant, on voit que *l'involution I_6 engendrée sur F par la transformation hermitienne S, cyclique d'ordre* 6, *possède* 10 *groupes renfermant des points multiples: c'est-à-dire un groupe formé par un point 6-ple, quatre groupes dont chacun est formé par deux points 3-ples, cinq groupes dont chacun est formé par trois points doubles.*

En considérant l'involution I_6 engendrée par S entre les courbes C d'un système Σ, on a d'une façon parfaitement analogue 10 *groupes renfermant des courbes comptées plusieurs fois. Les algorithmes introduits ci-dessus donnent d'une façon complète les relations entre ces groupes de points et de courbes.*

91. — *La surface Φ_{12} d'ordre* 12 *modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type IV.* — Pour construire un modèle projectif des surfaces birationnellement identiques à l'involution I_6, on procédera en suivant la marche plusieurs fois indiquée. On considérera d'abord le système linéaire $|D|$ appartenant à I_6 et renfermant la courbe $D = C + C' + \cdots + C^{(5)}$ composée avec C et ses transformées par rapport à $S, S^2, \ldots S^5$; à ce système répond sur une surface hyperelliptique Φ de la classe envisagée, un système linéaire simple $|\Gamma|$, dépourvu de points-base, de sorte qu'on pourra supposer que $|\Gamma|$ soit le système des sections hyperplanes de Φ.

La surface Φ_{12} ainsi obtenue a l'ordre 12 et ses sections hyperplanes ont le genre 7.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur du genre arithmétique p_a de Φ_{12}.

A cet effet il suffit de développer des considérations étroitement analogues à celles qu'on a exposées en calculant le genre p_a du type précédent.

Soit Φ_6 une surface de l'espace S_4 (type II) image projective de l'involution I_3 engendrée sur F par la transformation T; on aura sur Φ_6 une involution I_2

de 2^d ordre, dont les groupes correspondent birationnellement aux points de la surface Φ_{13}.

En effet un groupe

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ P^{IV},\ P^{V}$$

de I_6, obtenu du point P au moyen des opérations

$$S,\ S^2 = T^2,\ S^3 = K,\ S^4 = T,\ S^5 = K T^2$$

donne deux groupes

$$P,\ P^{IV},\ P'' \quad \text{et} \quad P''',\ P',\ P^{V}$$

de l'involution I_3.

Comme le second de ces groupes s'obtient du premier au moyen de la transformation K — qui change en elle-même T et par suite I_3 — l'involution I_2 dont on parle ci-dessus sera engendrée sur Φ_6 par une des 9 homographies involutoires qui changent en elle-même cette surface (n. 80).

En se rappelant que l'involution I_2 possède 8 coïncidences (n. 80) on en conclut (nn. 38, 87) que la *surface* Φ_{12} *a le genre* $p_a = 1\ (= p_g = P_2)$; et par suite *qu'elle appartient à l'espace* S_7 *et que ses sections hyperplanes sont des courbes canoniques.* Les 10 groupes de I_6 renfermant des points multiples sont représentés par 10 points singuliers de la surface Φ_{12}, et les 10 groupes de I_6 renfermant des courbes multiples, par 10 courbes rationnelles de la même surface.

Ces courbes sont rationnelles parce que l'involution I_6 établit sur chacune des courbes unies de S, T, K, une série linéaire (d'ordre 6, 3, 2 respectivement). On trouve aisément l'ordre des 10 courbes appartenant à Φ_{12}. Ainsi p. e. on voit qu'à la courbe $a a' = \alpha\alpha'$ répond une conique, car en comptant six fois la $a a'$ on obtient une courbe D; à la courbe $\beta\beta' + \gamma\gamma'$ répond une quartique, car la courbe $3(\beta\beta' + \gamma\gamma')$ est une D; etc.

On a donc sur Φ_{12} une conique, 4 quartiques et 5 courbes de sixième ordre. Les 10 points singuliers de Φ_{12} ne peuvent pas avoir une multiplicité plus grande que 2 (n. 88): on voit aisément par des considérations désormais connues, que les 4 groupes de I_6 renfermant des points 3-ples sont représentés par 4 points biplanaires ordinaires de Φ_{12}, et que les 5 groupes de I_6 renfermant des points 2-ples sont représentés par 5 points doubles coniques.

Arrêtons-nous sur le point P de Φ_{12} qui répond au groupe de I_6 renfermant le point 6-ple $(\alpha\alpha') = (a a')$, car l'analyse de la singularité que la surface Φ_{12} possède en P, se présente moins simple.

À priori une courbe D satisfaisant à la condition de passer par le point $(\alpha\alpha')$, pourra avoir une branche tangente à une direction arbitraire d issue par $(\alpha\alpha')$, ou bien une branche tangente à une des courbes $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$. Dans le premier cas la D doit posséder deux autres branches tangentes aux directions

d', d'' correspondantes à d par rapport à T, T^2, et par suite la D viendra avoir en $(\alpha\alpha')$ un point de multiplicité ≥ 3.

L'involution d'ordre 6 appartenant à D aura autant de points doubles qu'il y a de branches passant par $(\alpha\alpha')$: comme, d'après la formule de Zeuthen, une involution possède nécessairement un nombre pair de points doubles, le nombre des branches par $(\alpha\alpha')$ devra être pair, et par suite égal à six (car il doit résulter un multiple de 3). Mais alors, en désignant par x le genre de l'involution donnée sur D, on obtient

$$6 + 12(x-1) = 2(22-1)$$

car le genre d'une D arbitraire étant égal à 37, une D douée d'un point 6-ple aura le genre $37 - 15 = 22$. La relation précédente donne $x = 4$, ce qui est absurde, parce qu'une section hyperplane de Φ_{12}, issue arbitrairement par P, doit avoir le genre $7 - 1 = 6$.

Il faut donc conclure qu'une D passant de la façon la plus générale par le point $(\alpha\alpha')$, a une branche tangente à la courbe $\alpha\beta'$ (ou à $\alpha'\beta$). Mais si la D possédait en $(\alpha\alpha')$ une seule branche, l'involution définie sur D aurait seulement un point 6-ple équivalent à 5 points doubles, contrairement à la formule de Zeuthen. On doit donc supposer que D passe par $(\alpha\alpha')$ avec une branche tangente à $\alpha\beta'$ et avec un autre branche tangente à $\alpha'\beta$.

Il s'ensuit que le point P ne peut pas être simple, et par suite qu'il est double (n. 88). Deux courbes D correspondantes à deux sections hyperplanes de Φ_{12} issues par P, auront donc en $(\alpha\alpha')$ la multiplicité d'intersection $6.2 = 12$. On en tire que leurs branches ont deux à deux un contact d'ordre 4, c'est-à-dire qu'aux sections de Φ_{12} passant par P répondent sur F les courbes d'un système linéaire $|D_1|$ ayant en $(\alpha\alpha')$ un point-base double et quatre points-base simples sur chacune des branches de ce point double.

Si l'on considère les courbes D_1 passant par un point de F s'approchant à $(\alpha\alpha')$ suivant une direction différente des directions des tangentes fixes, en faisant toujours jouer la formule de Zeuthen, on trouve un système linéaire $\infty^5 |D_2|$ de courbes ayant en $(\alpha\alpha')$ un point 4-ple avec deux points doubles infiniment voisins suivant les directions de $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$.

Le genre de l'involution appartenant à une D_2 résulte égal à 5: donc aux courbes D_2 répondent sur Φ_{12} des sections hyperplanes de genre 5, passant par une certaine droite p issue par P. Il s'ensuit que Φ_{12} possède un point double P_1 infiniment voisin de P suivant la direction p. Le point P resultera donc biplanaire, car une section hyperplane arbitraire issue par P possède deux branches non tangentes, correspondantes aux deux branches d'une courbe D_1.

Les courbes D_2 passant par un point de F infiniment voisin à $(\alpha\alpha)$ suivant une direction arbitraire, forment un système linéaire $|D_3|$, ∞^4, de courbes ayant en $(\alpha\alpha')$ un point 6-ple, les six tangentes en ce point étant variables. Comme le genre de l'involution donnée sur une D_3 est égal à 4, on aura sur Φ_{12} en correspondance aux courbes D_3 de F, des sections de genre 4 découpées par des hyperplans qui passent par un certain plan π renfermant p. La surface Φ_{12} possédera donc un autre point double P_2 infiniment voisin à P_1.

Ainsi l'analyse du point singulier P est achevée. Nous l'avons exposée avec quelque détail, car cela nous dispensera de développer dans la suite les considérations conduisant à des résultats analogues.

En tenant compte des relations entre les courbes et les points unis de la cfg. appartenant à F, on arrive au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique régulière de rang 6, et du type IV, peut être transformée en une surface Φ_{12}, de genres 1, de l'espace S_7, ayant des sections hyperplanes d'ordre 12 et de genre 7. La Φ_{12} jouit des propriétés suivantes:

Elle possède 10 *points doubles* et 10 *courbes rationnelles* remarquables. Parmi les 10 points doubles il y a un point biplanaire singulier possédant deux points doubles successifs, 4 points biplanaires ordinaires, et 5 points coniques. Parmi les 10 courbes il y a une conique, 4 quartiques, 5 courbes d'ordre 6. Le long de la conique, des quartiques, des sextiques, on a respectivement des hyperplans ayant de contact d'ordre 5, 2, 1 avec la surface Φ_{12}.

Par rapport aux propriétés de la cfg. on a 2 points biplanaires ordinaires de rang 1; 2 points biplanaires ordinaires de rang 2; 2 points coniques de rang 1 et 3 points coniques de rang 2; 2 quartiques de rang 1 et 2 de rang 2; 2 sextiques de rang 1 et 3 de rang 2.

Entre les éléments de la cfg. on a les relations suivantes:

Par le point biplanaire singulier passent les 2 quartiques et les 2 sextiques de rang 1.

Par un point biplanaire de rang 1 passent la conique, une quartique de rang 1 et les 2 quartiques de rang 2.

Par un point biplanaire de rang 2 passent les 2 quartiques de rang 1 et 1 quartique de rang 2. Cette dernière possède un point double en le point biplanaire.

La conique renferme les 2 points biplanaires et les 2 points coniques de rang 1.

Un quartique de rang 1 renferme le point singulier, un point biplanaire de rang 1, et les 2 points biplanaires de rang 2.

Une quartique de rang 2 renferme les 2 points biplanaires de rang 1 et 1 point biplanaire de rang 2.

Par un point conique de rang I passe la conique, I sextique de rang I et les 3 sextiques de rang 2. La sextique de rang I passe doublement par le point envisagé.

Par un point conique de rang 2 passent les 2 sextiques de rang I et 2 sextiques de rang 2. Ces dernières passent doublement par le point conique.

Une sextique de rang I renferme le point singulier, un point conique de rang I et les 3 points coniques de rang 2.

Une sextique de rang 2 renferme les 2 points doubles de rang I et 2 points doubles de rang 2.

Remarquons enfin que:

La surface hyperelliptique Φ_{12} est caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers formant la configuration que nous avons définie.

Pour le prouver il suffit de montrer que étant donnée Φ_{12}, on peut construire une surface représentée sur celle-ci comptée deux fois et birationnellement identique à la surface Φ_6 (type II).

Le procédé que nous avons employé déjà en des cas analogues (nn. 49, 78, 89) ne presente ici aucune nouveauté. Pourtant nous pourrons nous dispenser de répéter une analyse qui réussirait un peu longue à suivre dans les détails.

Il suffira d'indiquer qu'on obtiendra une surface du type II (transformée de Φ_6), en posant

$$y_1 = x_1, \ldots y_8 = x_8, \quad y_9 = \sqrt{x_1 x_2},$$

où $(x_1, \ldots x_8)$ est un point mobile sur Φ_{12} et où l'on suppose que

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

représentent les hyperplans de S_7 tangents à Φ_{12} suivant les sextiques de rang I.

XI. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 8 (types V, VI, VII).

92. — *Surfaces de Jacobi possédant des groupes bidiédriques d'ordre* 8. — D'après l'analyse développée au n. 70 une surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x(x^4 - 1)$$

possède à priori quatre groupes bidiédriques distincts de transformations hermitiennes: les groupes que nous avons désignés par G_8, G'_8, G''_8, G'''_8. Chacun de

ces groupes est en isomorphisme oloédrique avec le groupe bidiédrique Γ_8 formé par les transformations birationnelles

$$\left(x' = -x,\ y' = \pm\, iy\right) \qquad \left(x' = \frac{1}{x},\ y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right)$$

$$\left(x' = -\frac{1}{x},\ y' = \pm \frac{y}{x^3}\right) \qquad \left(x' = x,\ y' = \pm\, y\right)$$

qui changent en elle-même la courbe f.

On peut prendre comme substitutions génératrices du groupes Γ_8 les $x' = -x,\ y' = iy;\ x' = \frac{1}{x},\ y' = \frac{iy}{x^3}$, dont l'une change l'autre en son inverse. En les appelant u_1, u_2, le groupe contiendra les substitutions suivantes:

$$u_1,\ u_2,\ u_1 u_2,\ u_1^3,\ u_2^3,\ u_1 u_2^3,\ u_1^2 \equiv u_2^2,\ u_1^4 \equiv u_2^4 \equiv 1.$$

Nous désignerons toujours dans la suite par $U_1, U_2;\ U'_1, U'_2;\ U''_1, U''_2;\ U'''_1, U'''_2$, les transformations de G_8, G'_8, G''_8, G'''_8 qui répondent respectivement aux transformations u_1, u_2 de Γ_8.

Étudions tout d'abord les propriétés du groupe G_8 par rapport aux points de F qui restent invariant vis-à-vis des transformations du groupe.

Rappelons-nous que G_8 est le transformé du groupe Γ_8 au moyen d'une correspondance point par couple établie entre la surface F et la courbe f, de sorte que toutes les transformations de G_8 ont en commun le point uni qui représente tout couple de la série g_2^1.

En désignant par

$$A_1, A_2;\ B_1, B_2;\ C_1, C_2$$

les trois couples de points unis des transformations $u_1, u_2, u_1 u_2$ — qui donnent les six coïncidences de la g_2^1 — on voit (n. 84) que u_1 laisse invariant les couples

$$2A_1,\ 2A_2,\ A_1 + A_2,\ B_1 + B_2,\ C_1 + C_2;$$

u_2 les couples:

$$2B_1,\ 2B_2,\ A_1 + A_2,\ B_1 + B_2,\ C_1 + C_2;$$

et $u_1 u_2$ les couples:

$$2C_1,\ 2C_2,\ A_1 + A_2,\ B_1 + B_2,\ C_1 + C_2.$$

Les transformations U_1, U_2 de la surface F ont donc les mêmes points unis, c'est-à-dire les 4 points répondant aux couples:

$$A_1 + A_2,\ B_1 + B_2,\ C_1 + C_2,\ 2A_1 = 2B_1 \equiv 2C_1 \equiv 2A_2 \equiv 2B_2 \equiv 2C_2.$$

Il s'ensuit que les quatres transformations $U_1 U_2, U_1^3, U_2^3, U_1 U_2^3$ ont aussi ces mêmes coïncidences.

Envisageons maintenant la transformation de 1re espèce

$$K \equiv U_1^2 \equiv U_2^2,$$

et le système Σ qui renferme totalement toute courbe C répondant aux couples de f qui ont un point fixe. En désignant par les symboles de Humbert les points et les courbes C qui restent invariant par rapport à K, on a ce tableau se rapportant à U_1 (n. 84).

Points

unis	cycles de 2d ordre
(11'), (22'), (33'), (44')	(12') (1'2) — (13') (2'4) — (14') (2'3) — — (23') (1'4) — (24') (1'3) — (34') (3'4).

Courbes C

unies	cycles de 2d ordre
12' — 1'2 — 34' — 3'4	13', 1'3 — 14', 1'4 — 23', 2'3 — 24', 2'4 — 11', 22' — 33', 44'.

Soit (11') le point uni qui représente la g_2^1: par ce point doivent passer deux courbes unies de U_2 donnant un cycle de 2d ordre de la transformation U_1; soient 13', 1'3 ces courbes unies, de sorte que 12', 1'2 et 14', 1'4 donneront deux cycles de 2d ordre de la transformation U_2.

En raisonnant comme au n. 84 on arrive au tableau

Points

unis	cycles de 2d ordre
(11'), (22'), (33'), (44')	(13') (1'3) — (12') (3'4) — (14') (3'2) — — (32') (1'4) — (34') (1'2) — (24') (2'4).

Courbes C

unies	cycles de 2d ordre
13' — 1'3 — 24' — 2'4	12', 1'2 — 14', 1'4 — 32', 3'2 — 34', 3'4 — 11', 33' — 22', 44'

se rapportant à U_2.

Comme toute substitution de G_8 s'obtient par multiplication de U_1, U_2, on en déduit sans difficulté que l'involution I_8 engendrée entre les points de F par les transformations du groupe bidiédrique G_8, possède 7 groupes doués de points multiples, c'est-à-dire les groupes formés par les points

$$(11'),\ (22'),\ (33'),\ (44'),$$

comptés 8 fois, et par les quaternes

$$(12')\ (1'2)\ (3'4)\ (34') - (13')\ (1'3)\ (24')\ (2'4) - (14')\ (1'4)\ (23')\ (2'3)$$

comptés 2 fois; tandis que l'involution J_8 engendrée par G_8 entre les courbes C, possède 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire les groupes formés par les couples

$$12',\ 1'2 - 34',\ 3'4 - 13',\ 1'3 - 24',\ 2'4 - 14',\ 1'4 - 23',\ 2'3$$

comptés 4 fois, et la quaterne

$$11',\ 22',\ 33',\ 44',$$

comptés 2 fois.

93. Étudions maintenant le groupe G'_8. On sait (n. 70) qu'en désignant par A la transformation de 2^de^ espèce (périodique d'ordre 2) qui amène $(11')$ en $(22')$, le groupe G'_8 est engendré par les substitutions

$$U'_1 = U_1, \qquad U'_2 = U_2 A.$$

Il s'agit de voir comment se distribuent par rapport à U'_1, U'_2 les points et les courbes unies de la transformation de 1^re^ espèce

$$K = U'^2_1\ U'^2_2.$$

La transformation U'_1 étant identique à U_1 on n'a ici qu'à imaginer reproduit le 1^r^ tableau du n. préc. Le tableau relatif à U'_2 se déduit aisément du 2^d^ tableau, lorsqu'on connait les permutations produites entre les points et les courbes unies de K par la transformation A.

Or, comme A change en elle-même la transformation K ne laissant pas invariant aucun point ni aucune courbe C, les courbes $12'$, $1'2$ passant par les points $(11')$, $(22')$, doivent se changer entre elles au moyen de A. En se rappelant que A est permutable avec U'_1 (n. 62) on voit de plus qu'elle change $(33')$ en $(44')$ et par suite que les courbes $34'$, $3'4$ doivent aussi se changer entre elles.

Comme la courbe $12'$ renferme les cycles

$$(13'),\ (2'4) - (14'),\ (2'3),$$

et la $1'2$ les cycles

$$(1'3),\ (24') - (1'4),\ (23'),$$

appartenant à U'_1, aucun de ces cycles ne pourra pas être ramené en lui-même par A.

D'autre côté la $U'_1 A$ doit avoir 4 points unis entre les 16 coïncidences de K, c'est-à-dire que U'_1 et A doivent avoir deux cycles de 2[d] ordre communs, donc les deux cycles restant

$$(12'),\ (1'2) - (34'),\ (3'4)$$

doivent appartenir aussi à la transformation A.

On en tire que A change la courbe $13'$ renfermant les points $(11')$, $(12')$, $(3'4)$, en la courbe $24'$ renfermant les points $(22')$, $(1'2)$, $(34')$; la courbe $1'3$ renfermant les points $(11')$, $(1'2)$, $(3'4)$, en la courbe $2'4$ renfermant les points $(22')$, $(12')$ $(3'4)$; la courbe $14'$ renfermant les points $(11')$, $(12')$, $(34')$, en la courbe $23'$ renfermant $(22')$, $(1'2)$, $(3'4)$, et la courbe $1'4$ renfermant $(11')$, $(1'2)$, $(3'4)$, en la courbe $2'3$ renfermant $(22')$, $(12')$, $(34')$.

Il s'ensuit enfin que A change entre elles les courbes $11'$, $22'$ et $33'$, $44'$ qui se coupent respectivement en les points $(12')$, $(1'2)$ et $(34')$, $(3'4)$.

On complète aisément l'analyse pour ce qui concerne les points unis de K.

Ainsi au point $(13')$ appartenant aux courbes $11'$, $12'$, $3'4$ répond le point $(24')$ appartenant aux courbes $22'$, $1'2$, $34'$; etc. etc.

En résumant on peut dire que les 16 coïncidences de K se distribuent en 8 cycles de A:

$$(11'),\ (22') \quad (33'),\ (44') \quad (12'),\ (1'2) \quad (34'),\ (3'4) -$$
$$(13'),\ (24') \quad (1'3),\ (2'4) - (14'),\ (23') - (1'4),\ (2'3),$$

et les 16 courbes unies, en 8 cycles ayant les mêmes symboles.

On arrive ainsi à construire le tableau se rapportant à U'_2, que nous omettrons de reproduire, car il se déduit tout de suite des tableaux relatifs à U_2 et A.

La conclusion est la suivante:

L'involution I'_8 engendrée sur F par le groupe G'_8 possède 6 groupes formés des couples

$$(11'),\ (22') - (33'),\ (44') - (13'),\ (2'4) - (1'3),\ (24') - (14'),\ (2'3) - (1'4),\ (23')$$

comptés quatres fois, et un groupe formé de la quaterne

$$(12'),\ (1'2),\ (34'),\ (3'4)$$

comptée deux fois; tandis que l'involution J'_8 engendrée entre les C de Σ par G'_8, possède 4 groupes formés des courbes

$$12', \; 1'2, \; 34', \; 3'4$$

comptées huit fois, et trois groupes formés des quaternes

$$11', \; 22', \; 33', \; 44' - 13', \; 1'3, \; 24', \; 2'4 - 14', \; 1'4, \; 23', \; 2'3$$

comptées deux fois.

Remarque. — On voit que les groupes G_8, G'_8 sont liés par cette relation: qu'on passe des propriétés de l'un aux propriétés de l'autre en remplaçant les points de F avec les courbes C de Σ. On peut donc dire brièvement que *les deux groupes G_8, G'_8 se correspondent au moyen de la dualité que nous avons signalée entre* les points de F et les courbes C d'un système Σ (n. 23).

94. Passons à étudier le groupe G''_8. En disant B la transformation de 2^de^ espèce faisant passer de $(11')$ à $(33')$, les transformations génératrices de G''_8 sont

$$U''_1 = U_1, \qquad U''_2 \equiv U_2 B.$$

On doit ici établir les permutations produites entre les points et les courbes C unies de la transformation

$$K \equiv U''^2_1 \equiv U''^2_2,$$

par la transformation B.

Pour celà on n'a qu'à répéter les considérations analogues à celles qu'on a exposées dans le n. préc.

Comme B change en elles-mêmes les transformations K, U_2, on aura les cycles

$$(11'), \; (33') - (22'), \; (44') - 13', \; 1'3 - 24', \; 2'4,$$

appartenant à B.

Mais comme $13'$ renferme les cycles

$$(12'), \; (3'4) - (14'), \; (23')$$

et $1'3$ les cycles

$$(1'2), \; (34') - (1'4), \; (2'3)$$

de la transformation U_2, ces cycles ne pourront pas être invariant par rapport à B, et par suit les cycles restants

$$(13'), \; (1'3) - (24'), \; (2'4)$$

devront appartenir à B; etc., etc.

On voit ainsi que le 16 coïncidences de K se distribuent en 8 cycles:

$$(11'),\ (33') - (22'),\ (44') - (13'),\ (1'3) - (24'),\ (2'4) -$$
$$(12'),\ (34') - (14'),\ (32') - (1'4),\ (3'2) - (1'2),\ (3'4)$$

de B, et que les 16 courbes se distribuent en 8 cycles ayant les mêmes symboles.

On en déduit aisément le tableau relatif à la transformation U''_2 et comme on possède déjà le tableau relatif à U''_1, il s'ensuit enfin que:

L'involution I''_8 engendrée par G''_8 entre les points de F possède 6 groupes formés par les couples

$$(11'),\ (33') - (22'),\ (44') - (13'),\ (2'4) \quad (1'3),\ (24') - (12'),\ (1'2) - (34'),\ (3'4)$$

comptés quatre fois, et un groupe formé par la quaterne

$$(14'),\ (1'4),\ (23'),\ (2'3)$$

comptée deux fois; tandis que l'involution J''_8 engendrée par G''_8 entre les courbes C possède 6 groupes formés par les couples

$$12',\ 3'4, - 1'2,\ 34' - 13',\ 1'3 - 24',\ 2'4 - 11',\ 22' - 33',\ 44'$$

comptés quatre fois, et un groupe formé par la quaterne

$$14',\ 1'4,\ 23',\ 2'3,$$

comptée deux fois.

Remarque. — L'analyse développée nous montre qu'au *moyen de la dualité établie entre les points de F et les courbes C de Σ, au groupe G''_8 répond un groupe doué des mêmes propriétés.* On peut dire que *G''_8 est correlatif à lui-même.*

95. Nous allons enfin achever l'étude des groupes bidiédriques, en remarquant que *les groupes G''_8* et *G'''_8 conduisent au même type de surface hyperelliptique* (VII).

C'est ce qu'on peut établir tout naturellement en répétant par G'''_8 l'analyse développée par les autres groupes: mais on peut aussi arriver à la même conclusion par des considérations *à priori*.

Les quatre points unis

$$(11'),\ (22'),\ (33'),\ (44')$$

communs aux transformations U_1, U_2, se distribuent en deux couples

$$(11'),\ (22') - (33'),\ (44')$$

ouissant des mêmes propriétés par rapport à chacune des transformations U_1, U_2.

En effet par rapport à U_1 chacun de ces couples peut se définir comme le couple des points *unis* communs à deux courbes unies, tandis qu'*aucun* des couples envisagés ne jouit pas de la même propriété par rapport à U_2.

Il s'ensuit que les transformations de 2[de] espèce déterminées par les couples

$$(11'),\ (33') \text{ et } (11'),\ (44')$$

se comportent de la même façon par rapport à U_1, U_2, et par suite que les groupes G''_8, G'''_8 ne sont pas essentiellement distincts.

96. En résumant on conclut que *sur la surface F il y a trois groupes bidiédriques birationnellement distincts qui se trouvent en isomorphisme oloédrique entre eux; ce sont les groupes G_8, G'_8, G''_8. Le premier est caractérisé par la condition de laisser invariant un point de F, le second (correlatif à G_8) par la condition de laisser invariant une courbe C, le troisième (correlatif à lui-même) par la condition de ne laisser invariant aucun point ni aucune courbe C.*

Les trois types de surfaces hyperelliptiques correspondantes aux groupes G_8, G'_8, G''_8 seront désignés respectivement par V, VI, VII.

97. *Genre des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII.* — La méthode suivie pour calculer le genre $p_a = p_g$ des surfaces hyperelliptiques répondant à des groupes cycliques G_4, G_6, s'étend aisément aux surfaces relatives à G_8, G'_8, G''_8.

Examinons tout d'abord une surface hyperelliptique Φ image de l'involution I_8 engendrée sur F par G_8; et démontrons qu'on peut poser une correspondance birationnelle entre les points de Φ et les groupes d'une certaine involution d'ordre 2 existant sur la surface ψ, d'ordre 8, qui répond au groupe cyclique G_4 engendré par U_1.

Soient $P, P', P'', P''', P^{IV}, P^{V}, P^{VI}, P^{VII}$ les points d'un groupe de I_8: ces points s'obtiennent de P au moyen des transformations

$$(1) \qquad 1,\ U_1,\ U_2,\ U_1U_2,\ U_1^3,\ U_2^3,\ U_1U_2^3,\ U_1^2,$$

et par suite ils se distribuent en les quaternes

$$P, P', P^{IV}, P^{VII} \text{ et } P^{V}, P''', P'', P^{VI}$$

engendrées par le groupe

$$1,\ U_1^2,\ U_1,\ U_1^3,$$

c'est-à-dire qu'ils donnent deux groupes de l'involution I_4 engendrée par U_1. On passe de la première quaterne à la seconde au moyen de la transformation U_2^3.

Il s'ensuit que tout groupe de I_8 vient être représenté par un couple de points de la surface ψ image de I_4. On voit aisément que la transformation involutoire qu'on trouve ainsi entre les points de ψ, comme image de la transformation U_2^3, est une homographie. En effet en disant $C, C', C'', C''', \ldots\ldots, C^{\mathrm{VII}}$ les courbes de Σ, obtenues de C au moyen des transformations (1), les courbes réductibles

$$C + C' + C^{\mathrm{IV}} + C^{\mathrm{VII}} \text{ et } C^{\mathrm{V}} + C''' + C'' + C^{\mathrm{VI}},$$

correspondantes entre elles par rapport à U_2^3, sont homologues à deux sections hyperplanes de ψ dans la correspondance [1, 4] qu'on a entre ψ et F. On en tire que la transformation involutoire appartenant à ψ change toute section hyperplane en une section hyperplane, et par suite qu'elle est une homographie.

Les tableaux relatifs aux transformations U_1, U_2 permettent très aisément de trouver les permutations produites par cette homographie entre les éléments de la configuration caractéristique de la surface ψ.

On arrive ainsi au résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique du type V répondant au groupe bi-diédrique G_8, est birationnellement identique à une involution I_2, d'ordre 2, appartenant à une surface hyperelliptique ψ_8 d'ordre 8, du type III.

L'homographie ω engendrant I_2 laisse invariant les 4 points biplanaires et les 4 quartiques de rang 1 appartenant à ψ_8, change par couples les 4 points coniques de rang 1 et les 4 coniques de la surface, change entre eux les 2 points coniques et les 2 quartiques de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ *huit coïncidences* distinctes au point de vue des transformations birationnelles. En effet comme il n'y a pas des coniques invariant par rapport à l'homographie ω, et comme les deux coniques issues par un point biplanaire P de ψ ne touchent pas le même plan tangent, l'homographie I_2 changera entre eux les plans tangents en P, et par suite on n'aura pas sur ces plans d'autre droite unie que leur intersection p. Le point double conique P_1 infiniment voisin à P, suivant la direction p, reste invariant par rapport à I_2, et dans le domaine de P_1 on aura une involution douée de 2 coïncidences. On trouve ainsi *deux* coïncidences dans le domaine (d'ordre 2) de tout point biplanaire, et par suite, en total huit coïncidences.

D'une façon semblable on arrive aux résultats analogues se rapportant aux groupes G_8', G_8'':

Toute surface hyperelliptique du type VI répondant au groupe bi-diédrique G_8' peut se transformer birationnellement en une involution I_2 engendrée par une homographie ω' qui change en elle-même une surface ψ_8 du type III.

L'homographie ω' change par couples les 4 points biplanaires et les 4 quartiques de rang 1 appartenant à ψ'_8, laisse invariant les 4 points coniques de la surface, et change entre eux les 2 points coniques et les 2 quartiques de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences: en chacun des 4 points doubles de rang 1 tombent 2 coïncidences, c'est-à-dire les points unis de l'involution engendrée par I_2 dans le domaine du point double.

Toute surface hyperelliptique du type VII (répondant au groupe G''_8) est identique à une involution I_2 engendrée par une homographie ω'', qui change en elle-même la surface ψ'_8 envisagée ci-dessus.

L'homographie ω'':

fait correspondre par couples les 4 points biplanaires,

laisse invariant 2 points coniques de rang 1, changeant entre eux les deux restant,

laisse invariant les 2 points coniques de rang 2.

fait correspondre par couples les 4 coniques,

laisse invariant 2 quartiques de rang 1, changeant entre elles les deux restant,

laisse invariant les 2 quartiques de rang 2.

On a encore huit coïncidences de I_2, tombant à couples en chacun des 4 points doubles coniques.

Il s'ensuit que *le genre $p_a (= p_g)$ de toute surface répondant à un groupe bi-diédrique est égal à* 1 (n. 86).

98. *Les modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques* V, VI, VII. Pour obtenir un modèle projectif simple de la classe des surfaces répondant à un des groupes bi-diédriques, on n'a qu'à suivre le procédé développé plusieurs fois.

On commence à considérer le système linéaire

$$|D| = |C + C' + \cdots + C^{\text{VII}}|$$

qui appartient à l'involution engendrée sur F par le groupe envisagé, $C', C'', \ldots, C^{\text{VII}}$ étant les courbes correspondantes à une C au moyen des transformations du groupe.

La correspondance [8, 1] entre la surface de Jacobi F et une surface image de l'involution, transforme le système $|D|$ en un système linéaire simple $|\Gamma|$, ayant le degré 16, le genre 9 et la dimension 9,[1] de sorte que l'on peut prendre comme modèle de la surface image de l'involution, une surface Φ_{16} d'ordre 16 de l'espace S_9.

Les points singuliers de Φ correspondent aux groupes de l'involution doués d'éléments multiples: l'analyse de la singularité en chacun de ces points vient

[1] Le calcul de la dimension se fait tout de suite car on connait le genre de la surface renfermant $|\Gamma|$.

être facilitée, car on sait *à priori* qu'il s'agit de points doubles (n. 88). A la configuration des points doubles vient liée la cfg. des courbes rationnelles répondant aux courbes C qui admettent des transformations du groupe.

Nous omettrons l'étude d ces points et de ces courbes, car à présent le lecteur est en mesure de développer cet étude par lui même; et nous nous bornerons à énoncer les résultats suivants:

Toute surface hyperelliptique du type V peut être transformée birationnellement en une surface Φ_{16}, *d'ordre* 16, *appartenant à l'espace* S_9. *Cette surface possède* 7 *points doubles et* 7 *courbes rationnelles remarquables. Parmi les points doubles* 4 *sont des points uniplanaires ordinaires, et les restants sont des points coniques; parmi les courbes rationnelles* 6 *sont des quartiques et une est une courbe d'ordre* 8. *La configuration de ces points et de ces courbes jouit des propriétés suivantes:*

Par tout point uniplanaire passent simplement 3 quartiques, dont chacune renferme aussi un des 3 points doubles infiniment voisins au point uniplanaire.

Par tout point conique passent 4 quartiques et la courbe d'huitième ordre: les premières y passent simplement, la seconde doublement.

Toute quartique renferme deux points uniplanaires et deux points coniques, tandis que la courbe d'huitième ordre renferme (doublement) les 3 points coniques.

Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VI, est une surface Φ'_{16}, *d'ordre* 16, *de l'espace* S_9, *qui renferme* 7 *points doubles et* 7 *courbes rationnelles. Parmi les points doubles,* 6 *sont des points biplanaires dont chacun possède un point double infiniment voisin, et le restant est un point double conique; parmi les courbes,* 4 *sont des coniques et* 3 *des courbes d'ordre* 8. *La configuration relative est caracterisée par les propriétés suivantes:*

Par un point biplanaire passent (simplement) deux coniques et deux courbes d'8^{me} ordre.

Par le point conique passent doublement les 3 courbes d'8^{me} ordre.

Une conique renferme 3 points biplanaires, tandis qu'une courbe d'8^{me} ordre renferme (simplement) 4 points biplanaires et (doublement) le point conique.

Toute surface hyperelliptique de rang 8 *et du type VII peut être transformée en une surface* Φ''_{16} *d'ordre* 16, *appartenant à l'éspace* S_9 *et renfermant* 7 *points doubles et* 7 *courbes rationnelles.*

Parmi les points doubles, 6 *sont des points biplanaires (possédant un point double dans leurs domaines de* 1^r *ordre) et le restant est un point conique.*

Parmi les courbes rationnelles, 6 *sont des quartiques et la courbe restant est d'ordre* 8.

La configuration appartenant à Φ''_{16} est caractérisée par les propriétés suivantes:

Par tout point biplanaire passent (simplement) 3 quartiques et la courbe d'ordre 8.

Toute quartique renferme 3 points biplanaires et le point conique.

Par le point conique passent (simplement) les 6 quartiques.

La courbe d'ordre 8 renferme les 6 points biplanaires.

En chacun des cas V, VI, VII, il y a des hyperplans tangents à notre surface-modèle (Φ, Φ', ou Φ''). Et précisément il y a un hyperplan ayant un *contact d'ordre* $\frac{16}{m} - 1$ *le long de toute courbe rationnelle d'ordre* m ($= 2, 4, 8$).

99. *Les surfaces Φ_{16}, Φ'_{16}, Φ''_{16}, caractérisées par leurs configurations de points et de hyperplans singuliers.* En nous rapportant d'abord au cas V, nous allons prouver que:

La configuration de points et d'espaces singuliers que nous venons de définir, joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ_{16}.

Pour le prouver nous procédons par la même méthode que nous avons expliquée en des cas analogues.

Nous supposons donnée la surface Φ_{16}. Parmi ses 6 quartiques on peut en choisir deux qui n'aient pas commun un point uniplanaire de la surface (ce choix peut être fait de trois façons différentes, correspondantes aux trois partages des quatre points uniplanaires en deux couples). On peut supposer que les hyperplans renfermant ces deux quartiques soient

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Etant $(x_1, \ldots\ldots x_{10})$ un point mobile de S_9, posons

$$y_1 = x_1, \ldots y_{10} = x_{10}, \quad y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Ces équations représentent une surface décrite par le point (y), surface qui est birationnellement identique à la surface Φ_8 que nous avons choisie comme modèle du type III.

Ici encore nous nous épargnerons de développer la démonstration dans ses détails. Il suffira de remarquer que la surface double que nous avons définie par les équations précédentes n'a pas de points de diramation dans le domaine d'un point conique de Φ_{16}, tandis qu'il y a diramation en tout point infiniment voisin à un point uniplanaire, sauf en deux points de ce domaine. On en déduit qu'aux 3 points coniques de Φ_{16} correspondent 6 points coniques, aux 4 points

uniplanaires correspondent 4 points biplanaires etc. de la surface normale d'ordre 32 en S_{14}, qui a pour projection la surface (y).

D'une façon analogue on aura que:

La configuration de points et d'espaces singuliers que nous venons de définir joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ'_{16}.

Etant donnée une telle Φ'_{16} considérons deux hyperplans tangents à Φ'_{16} suivant des quartiques qui se coupent en deux points biplanaires et en le point conique; soient

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0$$

les équations de ces hyperplans. Posons

$$y_1 = x_1, \ldots y_{10} = x_{10}, \; y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

La surface ainsi définie résultera birationnellement identique à la surface Φ_8 que nous avons choisie comme modèle du type III.

De même que dans les cas précédents *la configuration de points et d'espaces que nous venons de définir, joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique* Φ''_{16}.

En effet étant donnée une Φ''_{16} possédant une telle configuration, on obtiendra une surface hyperelliptique du type III (identique à notre Φ_8), en posant

$$y_1 = x_1 \ldots y_{10} = x_{10}, \; y_{11} = \sqrt{x_1 x_2},$$

où l'on suppose que

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0,$$

soient deux parmi les trois hyperplans tangents à Φ''_{16} suivant des courbes d'ordre 8.

XII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 12 (type VIII).

100. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes* G_{12}. Envisageons la surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x^6 - 1,$$

qui admet le groupe des 12 transformations birationnelles

$$(x' = \varepsilon x,\ y' = \pm y)\ \left(x' = \frac{1}{x},\ \ y' = \pm\frac{iy}{x^3}\right)\ \left(x' = \frac{\varepsilon}{x},\ y' = \frac{\pm\varepsilon}{x^3}\right)$$

$$\left(x' = \frac{\varepsilon^2}{x},\ \ y' = \pm\frac{iy}{x^3}\right)\ (x' = \varepsilon^2 x,\ y' = \pm y)\ \ (x' = x,\ y' = \pm y)$$

où:

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}};$$

et soit G_{12} le groupe de F répondant au groupe de f au moyen de la correspondance point par couple existant entre la courbe et la surface.

En représentant respectivement par T, U les transformations hermitiennes de F correspondantes aux transformations

$$(x' = \varepsilon x,\ y' = y),\ \left(x' = \frac{1}{x},\ y' = \frac{iy}{x^3}\right),$$

le groupe G_{12} renfermera les substitutions T, U, K, TK, UK, UT, UTK, T^2, T^2K, UT^2, UT^2K, 1, où l'on a posé

$$K \equiv U^2.$$

On remarquera que U change T en T^2, et que parmi les 11 transformations non identiques de G_{12} une, K, est cyclique de 2[d] ordre; deux T, T^2, sont cycliques d'ordre 3; six, U, UK, UT, UTK, UT^2, UT^2K, d'ordre 4; et les deux restant, TK, T^2K d'ordre 6.

Nous désignons encore par Σ le système complet renfermant totalement les courbes C de F qui répondent aux séries des couples ayant un point fixe.

Il s'agit tout d'abord de chercher les points et les courbes C qui restent invariant par rapport aux transformations du groupe et d'établir les relations entre ces éléments invariants.

Ainsi que nous l'avons remarqué, les transformations du groupe G_{12} de F auront un même point uni, qui correspond à la série g_2^1, invariant par rapport aux transformations de f.

Pour désigner les points et les courbes invariant de la transformation K, nous adopterons le symbolisme de M. Humbert, en construisant les symboles au moyen des deux séries de nombres

$$a,\ b,\ c,\ d\ \text{ et }\ a',\ b',\ c',\ d';$$

tandis que les éléments invariants de T seront désignés par le symbolisme introduit au Chapitre VIII, en combinant les deux séries

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ et } \alpha', \beta', \gamma'.$$

On pourra toujours supposer qu'au point uni commun répondent les symboles

$$(a\,a') \text{ et } (\alpha\,\alpha'),$$

de sorte que les six courbes invariants de K qui passent par $(a\,a')$ seront

$$a\,b',\ a\,c',\ a\,d',\ a'\,b,\ a'\,c,\ a'\,d,$$

tandis que les quatre courbes invariants de T par le même point seront

$$\alpha\,\beta',\ \alpha\,\gamma',\ \alpha'\,\beta,\ \alpha'\,\gamma.$$

Cherchons quelles sont les permutations produites par U entre les points et les courbes invariant de T; et les permutations produites par T, U entre les éléments invariant de K.

Comme U change entre eux les deux points unis de T appartenant au domaine de $(\alpha\,\alpha')$, le couple des courbes $\alpha\,\beta'$, $\alpha\,\gamma'$ sera changé en le couple $\alpha'\,\beta$, $\alpha'\,\gamma$: soit par exemple $\alpha'\,\beta$ la transformée de $\alpha\,\beta'$, et $\alpha'\,\gamma$ la transformée de $\alpha\,\gamma'$. En tenant compte du fait que la transformation de 1re espèce $K \equiv U^2$ change entre elles les $\alpha\,\beta'$, $\alpha\,\gamma'$ et les $\alpha'\,\beta$, $\alpha'\,\gamma$, on déduit que

$$\alpha\,\beta',\ \alpha'\,\beta,\ \alpha\,\gamma',\ \alpha'\,\gamma$$

est un cycle de 4me ordre par rapport à U.

Il s'ensuit que le point $(\beta\,\beta')$ commun aux courbes $\alpha'\,\beta$, $\alpha\,\beta'$ hors de $(\alpha\,\alpha')$, vient changé en le point $(\beta\,\gamma')$ commun aux courbes homologues $\alpha\,\gamma'$, $\alpha'\,\beta$ et analoguement que $(\beta\,\gamma')$ vient changé en $(\gamma\,\gamma')$ et ce point en $(\beta'\,\gamma)$; de sorte que l'on a le cycle d'ordre 4

$$(\beta\,\beta')\ (\beta\,\gamma')\ (\gamma\,\gamma')\ (\beta'\,\gamma).$$

La U change le point $(\alpha\,\gamma')$ conjugué de $(\alpha\,\alpha')$ par rapport à la g^1_2 de la courbe $\alpha\,\beta'$, en le point $(\alpha'\,\gamma)$ conjugué de $(\alpha\,\alpha')$ sur la courbe homologue $\alpha'\,\beta$; et analoguement $(\alpha'\,\gamma)$ en $(\alpha\,\beta')$, et $(\alpha\,\beta')$ en $(\alpha'\,\beta)$, de sorte qu'on a le cycle

$$(\alpha\,\gamma')\ (\alpha'\,\gamma)\ (\alpha\,\beta')\ (\alpha'\,\beta).$$

Comme ces 4 points appartiennent à la courbe $\alpha\,\alpha'$, on en tire que cette courbe est unie par rapport à U. On déduit de plus que les 4 courbes restant forment le cycle

$$\beta\,\beta',\ \beta\,\gamma',\ \gamma\,\gamma',\ \beta'\,\gamma,$$

car à la courbe $\beta\beta'$ renfermant les points $(\beta\alpha')$ $(\beta\gamma')$ $(\beta'\alpha)$ $(\beta'\gamma)$, répond la courbe $\beta'\gamma$ renfermant les points correspondants, etc.

En résumant on a par rapport à U le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 4^{me} ordre
$(\alpha\alpha')$	$(\alpha\beta')$ $(\alpha'\beta)$ $(\alpha\gamma')$ $(\alpha'\gamma)$ — $(\beta\beta')$ $(\beta\gamma')$ $(\gamma\gamma')$ $(\beta'\gamma)$.

Courbes

unies	cycles de 4^{me} ordre
$\alpha\alpha'$	$\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$, $\alpha\gamma'$, $\alpha'\gamma$ — $\beta\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\gamma'$, $\beta'\gamma$.

Le tableau qui sert à indiquer les permutations produites par T' entre les éléments invariant de K, se construit aisément en supposant que les ternes

$$ab',\ ac',\ ad' \text{ et } a'b,\ a'c,\ a'd$$

donnent deux cycles de T. On n'a ici qu'à rappeler le résultat obtenu au n. 90:

Points

unis	cycles de 3^{me} ordre
$(aa') = (\alpha\alpha')$	$(bb')\,(cc')\,(dd')$ — $(ab')\,(ac')\,(ad')$ — $(bc')\,(cd')\,(db')$ — $(cb')\,(dc')$ (bd') — $(ca')\,(da')\,(ba')$

Courbes

unies	cycles de 3^{me} ordre
$aa' = \alpha\alpha'$	bb', cc', dd' — ab', ac', ad' — bc', cd', db' — cb', dc', bd' — ca', da', ba'.

On reconnait aisément que parmi les 6 courbes invariant par rapport à K, qui passent par (aa'), les ab', $a'b$ sont aussi unies par rapport à U, et que les

$$ac',\ ad' - a'c,\ a'd$$

forment deux cycles de 2^d ordre; ceci posé on aura par rapport à U le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 2^{de} ordre
(aa'), (bb'), (ab'), $(a'b)$	$(ac')\,(ad')$ — $(a'c)\,(a'd)$ — $(b'c)\,(b'd)$ — $(bc')\,(bd')$ — $(c'd)$ (cd') — $(cc')\,(dd')$

Courbes

unies	cycles de 2^{de} ordre
$aa', bb', ab', a'b$	$ac', ad' - a'c, a'd - b'c, b'd - bc', bd' - c'd, cd' - cc', dd'$.

En appliquant les opérations du groupe G_{12} à tout point et à toute courbe appartenant aux configurations relatives à T et à K, on conclut que:

L'involution I_{12} engendrée sur F par G_{12} possède:

1) Un groupe formé du point 12-ple $(\alpha\alpha') = (aa')$;
2) Trois groupes formés des ternes

$$(bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad') \quad (a'b)(a'c)(a'd)$$

comptés 4 fois;
3) Deux groupes formés des quaternes

$$(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\beta\gamma')(\beta'\gamma) - (\alpha\beta')(\alpha'\beta)(\alpha\gamma')(\alpha'\gamma)$$

comptés 3 fois.
4) Un groupe formé par les 6 points doubles:

$$(bc')(cd')(b'd)(bd')(b'c)(dc')$$

L'involution J_{12} engendrée par G_{12} entre les courbes de Σ possède:

1) Un groupe formé par la courbe $\alpha\alpha' = aa'$ comptée 12 fois.
2) Trois groupes formés d'éléments 4-ples

$$bb', cc', dd' - ab', ac', ad' - a'b, a'c, a'd.$$

3) Deux groupes formés d'éléments 3-ples:

$$\beta\beta', \gamma\gamma', \beta\gamma', \beta'\gamma - \alpha\beta', \alpha'\beta, \alpha\gamma', \alpha'\gamma.$$

4) Un groupe formé d'éléments doubles:

$$bc', cd', b'd, bd', b'c, dc'.$$

101. *Le genre de la surface hyperelliptique du type* VIII. Remarquons que les transformés d'un point de F, au moyen des transformations du groupe G_{12}, se partagent en deux groupes homologues par rapport à U, groupes qui sont engendrés par la transformation TK, d'ordre 6; on en déduit que toute surface hyperelliptique Φ, image de l'involution I_{12}, pourra être transformée birationnellement en une involution I_2, d'ordre 2, appartenant à une surface ψ_{12} du type IV. On peut établir, comme avant, que la I_2 vient engendrée sur ψ par une homographie involutoire, etc., etc., de sorte que l'on obtient le résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique répondant au groupe G_{12}, c'est-à-dire toute surface hyperelliptique du type VIII, est birationnellement identique à une involution I_2 engendrée sur une surface ψ_{12} d'ordre 12, du type IV, par une homographie involutoire.

Cette homographie:

Laisse invariant le point biplanaire singulier, les deux points coniques de rang 1 et un point conique de rang 2 appartenant à la surface;

change entre eux les deux points biplanaires de rang 1, les deux points biplanaires de rang 2 et les deux points coniques restant de rang 2.

Laisse invariant la conique, les deux sextiques de rang 1 et une sextique de rang 2 appartenant à la surface;

change entre elles les deux quartiques de rang 1, les deux quartiques de rang 2 et le deux sextiques restant de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences distinctes au point de vue des transformations birationnelles: deux coïncidences tombent dans le domaine du *dernier* point double conique infiniment voisin au point biplanaire singulier, et deux coïncidences dans le domaine de tout point double conique invariant.

Il s'ensuit (n. 87) que »le genre $p_a = p_g$ de toute surface hyperelliptique VIII est égal à 1».

102. *Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VIII.* La surface Φ_{24} dont les sections hyperplanes répondent aux courbes du système linéaire

$$|D| = |C + C' + \cdots + C^{(XI)}|$$

tracé sur F, est d'ordre 24.

Comme la Φ_{24} a le genre $p = 1$ et ses sections hyperplanes sont des courbes de genre 13, la dimension de l'espace renfermant Φ_{24} résulte égale à 13.

Aux 7 groupes de I_{12} doués d'éléments multiples répondent 7 points doubles de Φ, et aux 7 groupes singuliers de I_{12} répondent 7 courbes rationnelles.

L'étude des points doubles et de la configuration formée par ces points et par les courbes rationnelles se fait en suivant la marche plusieurs fois indiquée.

On arrive ainsi au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique du type VIII peut être transformée en une surface Φ_{24}, d'ordre 24, appartenant à l'espace S_{13}. Cette surface renferme 7 points doubles et 7 courbes rationnelles remarquables; c'est-à-dire:

Un point uniplanaire singulier, possédant trois points doubles successifs (dans les domaines de 1^r^, 2^de^, 3^me^ ordre); trois points biplanaires singuliers, dont chacun possède un point double infiniment voisin; deux points biplanaires ordinaires et un point conique; une courbe d'ordre 2, trois courbes d'ordre 6, deux d'ordre 8 et une d'ordre 12.

Par rapport aux propriétés de la configuration appartenant à Φ_{24}, on a deux points biplanaires singuliers de rang 1 et un de rang 2; un point biplanaire

ordinaire de rang I et un de rang 2; deux sextiques de rang I et une de rang 2; une courbe d'ordre 8 et rang I, une de rang 2.

Par le point uniplanaire passent simplement les deux sextiques de rang I et la courbe d'ordre 8 et rang I avec un point de rebroussement.

Par un point biplanaire singulier de rang I passent la conique, une sextique de rang I, la sextique de rang 2, et la courbe d'ordre 12.

Par le point biplanaire singulier de rang 2 passent les deux sextiques de rang I et la courbe d'ordre 12.

Par le point biplanaire ordinaire de rang 2 passent la conique et les deux courbes d'ordre 8. La courbe d'ordre 8 et de rang 2, y passe doublement.

Par le point biplanaire ordinaire de rang 2 passent les deux courbes d'ordre 8. La courbe d'ordre 8 et de rang I y passe doublement.

Par le point conique passent les trois sextiques et la courbe d'ordre 12. La sextique de rang 2 et la courbe d'ordre 12 y passent doublement.

La conique renferme les deux points biplanaires singuliers de rang I et le point biplanaire ordinaire de rang I.

Une sextique de rang I renferme, le point uniplanaire, un point biplanaire singulier de rang I, le point biplanaire singulier de rang 2 et le point conique.

La sextique de rang 2 renferme les deux points biplanaires singuliers de rang I et le point conique.

La courbe d'ordre 8 et de rang I renferme le point uniplanaire et les deux points biplanaires ordinaires.

La courbe d'ordre 8 et de rang 2 renferme les deux points biplanaires ordinaires.

La courbe d'ordre 12 renferme les trois points biplanaires singuliers et le point conique.

Ajoutons que:

La configuration des points et des hyperplans singuliers qui touchent Φ_{24} suivant ses courbes rationnelles, joue un rôle caractéristique par rapport à cette surface hyperelliptique.

Pour le prouver on se donnera une surface possédant une telle configuration de points et de hyperplans singuliers, et on tâchera de construire une surface ψ représentée sur la Φ_{24} comptée deux fois, qui appartienne au type IV.

On devra obtenir sur ψ une involution I_2, qui agira d'une façon connue sur les éléments de la configuration caractéristique de ψ (n. 101).

En s'aidant par cette connaissance on trouvera qu'on peut obtenir une surface ψ transformée de la Φ_{12} du type IV, en procédant de la façon suivante.

Soient

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0$$

les hyperplans tangents à Φ_{24} suivant les deux sextiques de rang I, et posons

$$y_1 = x_1, \; \ldots \; y_{14} = x_{14}, \; y_{15} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

La surface définie par ces formules résultera birationnellement identique à la Φ_{12} (type IV).

C'est ce qu'on montrerait par une analyse détaillée dont nous croyons de pouvoir nous passer, attendu qu'elle ne présenterait aucune nouveauté.

XIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 24 (types IX, X, XI).

103. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes bi-tétraédriques.* On a ici à considérer la surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x(x^4 - 1),$$

qui admet le groupe bi-tétraédrique:

$$\left(x' = -x, \; y' = \pm i y\right) \left(x' = \frac{1}{x}, \; y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right) \left(x' = -\frac{1}{x}, \; y' = \pm \frac{y}{x^3}\right)$$

$$\left(x' = x, \; y' = \pm y\right) \left(x' = \frac{i - x}{i + x}, \; y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(i+x)^3}\right) \left(x' = \frac{x+i}{x-i}, \; y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(x-i)^3}\right)$$

$$\left(x' = \frac{x-i}{x+i}, \; y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(x+i)^3}\right) \left(x' = \frac{i+x}{i-x}, \; y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(i-x)^3}\right)$$

$$\left(x' = i\frac{1+x}{1-x}, \; y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(1-x)^3}\right) \left(x' = i\frac{x+1}{x-1}, \; y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(x-1)^3}\right)$$

$$\left(x' = i\frac{1-x}{1+x}, \; y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(1+x)^3}\right) \left(x' = i\frac{x-1}{x+1}, \; y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(x+1)^3}\right).$$

Ce groupe est engendré par les 3 substitutions

(1) $$\left(x' = -x, \; y' = iy\right) \left(x' = \frac{1}{x}, \; y' = \frac{iy}{x^3}\right) \left(x' = \frac{i-x}{i+x}, \; y' = \frac{2y\sqrt{2i}}{(i+x)^3}\right),$$

dont les deux premières sont cycliques d'ordre 4 et la troisième d'ordre 3 ou 6, suivant que l'on prend

$$\sqrt{2}\,i = -(i+1) \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}\,i = i+1.$$

Nous désignerons par G_{24} le groupe de F qui répond au groupe envisagé de f au moyen de la correspondance point par couple entre la courbe et la surface. On peut prendre comme substitutions génératrices de G_{24} les transformations hermitiennes U_1, U_2, S_1 correspondantes aux transformations (1), où l'on a pris $\sqrt{2}\,i = -(i+1)$.

Le groupe G_{24} renferme le sous-groupe bi-diédrique G_8 engendré par U_1, U_2: hors des substitutions de ce sous-groupe on a en G_{24} 8 transformations cycliques d'ordre 3 $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_1^2\ S_2^2\ S_3^2\ S_4^2$, et 8 cycliques d'ordre 6 qu'on obtient de ces dernières en les multipliant par la transformation de 1re espèce:

$$K = U_1^2 = U_2^2.$$

Les transformations de G_{24} ont un point uni commun répondant aux couples de la g_2^1.

En désignant les éléments unis de K (points et courbes C du système Σ) par les symboles obtenus en combinant les nombres des deux séries

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ et } 1',\ 2',\ 3',\ 4',$$

et les éléments unis de S_i par les symboles obtenus en combinant les caractères des deux séries

$$a_i,\ b_i,\ c_i, \text{ et } a'_i,\ b'_i,\ c'_i,$$

on peut toujours supposer qu'au point uni commun appartiennent les symboles:

$$(11'),\ (a_1 a'_1),\ (a_2 a'_2),\ (a_3 a'_3),\ (a_4 a'_4).$$

Il y a sur F 48 points qui restent invariant par rapport à des transformations de G_{24}: c'est-à-dire le point uni commun, les 32 points unis appartenant ultérieurement aux transformations $S_1\ S_2\ S_3\ S_4$ et les 15 points unis appartenant ultérieurement à K. Les permutations produites par U_1, U_2 entre les points et les courbes unies de K sont données par les tableaux au n. 92: il s'agit donc d'établir quelles sont les permutations produites par S_1, entre les éléments unis de K, et par U_1, U_2 entre les éléments unis de $S_1\ S_2\ S_3\ S_4$.

En faisant usage de considérations analogues à celles qu'on a exposées plusieurs fois dans l'analyse des types précédents, on arrive aisément aux tableaux cherchés que nous omettrons de transcrire ici.

La conclusion à laquelle on est amené par l'examen de ces tableaux est la suivante:

L'involution I_{24} engendrée par G_{24} entre les points de F renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

1) Un groupe formé par le point uni commun compté 24 fois.

2) Un groupe formé par les 12 points doubles:

$$(12')\ (1'2)\ (13')\ (1'3)\ (14')\ (1'4)\ (23')\ (2'3)\ (34')\ (3'4)\ (24')\ (2'4).$$

3) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(a_1b'_1)\ (a_1c'_1)\ (a_2b'_2)\ (a_2c'_2)\ (a_3b'_2)\ (a_3c'_3)\ (a_4b'_4)\ (a_4c'_4).$$

4) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(a'_1b_1)\ (a'_1c_1)\ (a'_2b_2)\ (a'_2c_2)\ (a'_3b_3)\ (a'_3c_3)\ (a'_4b_4)\ (a'_4c_4).$$

5) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(b_1b'_1)\ (c_1c'_1)\ (b_2b'_2)\ (c_2c'_2)\ (b_3b'_3)\ (c_3c'_3)\ (b_4b'_4)\ (c_4c'_4).$$

6) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(b_1c'_1)\ (b'_1c_1)\ (b_2c'_2)\ (b'_2c_2)\ (b_3c'_3)\ (b'_3c_3)\ (b_4c'_4)\ (b'_4c_4).$$

7) Un groupe formé par les 3 points 8-ples:

$$(22')\ (33')\ (44').$$

L'involution J_{24} engendrée par G_{24} entre les courbes C du système Σ, possède 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

1) Un groupe formé par les 4 courbes 6-ples:

$$11' = a_1a'_1,\ 22' = a_2a'_2,\ 33' = a_3a'_3,\ 44' = a_4a'_4.$$

2) Un groupe formé par les 6 courbes 4-ples:

$$12',\ 1'2,\ 13',\ 1'3,\ 14',\ 1'4.$$

3) Un groupe formé par les 6 courbes 4-ples:

$$23',\ 2'3,\ 24',\ 2'4,\ 34',\ 3'4.$$

4) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$a_1b'_1,\ a_1c'_1,\ a_2b'_2,\ a_2c'_2,\ a_3b'_3,\ a_3c'_3,\ a_4b'_4,\ a_4c'_4.$$

5) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$a'_1 b_1,\ a'_1 c_1,\ a'_2 b_2,\ a'_2 c_2,\ a'_3 b_3,\ a'_3 c_3,\ a'_4 b_4,\ a'_4 c_4.$$

6) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$b_1 b'_1,\ c_1 c'_1,\ b_2 b'_2,\ c_2 c'_2,\ b_3 b'_3,\ c_3 c'_3,\ b_4 b'_4,\ c_4 c'_4.$$

7) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$b_1 c'_1,\ b'_1 c_1,\ b_2 c'_2,\ b'_2 c_2,\ b_3 c'_3,\ b'_3 c_3,\ b_4 c'_4,\ b'_4 c_4.$$

Disons quelques mots du groupe G'_{24} qui renferme le sous-groupe bi-diédrique invariant G'_8, engendré par les substitutions

$$U'_1 \equiv U_1,\ U'_2 \equiv U_2 A,$$

A étant une convenable transformation de 2$^{\text{de}}$ espèce (n. 70).

Comme G'_8 répond à G_8 au moyen de la dualité entre les points de F et les courbes C du système Σ, le groupe G'_{24} sera correlatif à G_{24}, et l'on pourra par conséquent obtenir les propriétés de la configuration relative à G'_{24} en changeant entre elles dans le dernier énoncé les involutions I_{24} et J_{24} et les symboles entre ( ) en symboles sans ( ), et réciproquement.

Considérons maintenant le groupe G''_{24}, correlatif à lui-même, qui renferme le sous-groupe invariant G''_8 (n. 70) engendré par

$$U''_1 \equiv U_1,\ U''_2 \equiv U_2 B.$$

Comme

$$K'' \quad U''^2_1 \quad U^2_1 \quad K,$$

on trouve tout de suite les permutations produites par U''_1, U''_2 entre les éléments unis de K''. Pour construire les tableaux restant, on commencera à remarquer que le groupe G''_{24} étant oloédriquement isomorphe à G_{24}, on doit trouver en G''_{24} une substitution S''_1, répondant à S_1 et changeant U''_1 en U''_2, etc. etc.

En ce cas la conclusion relative à la configuration des éléments unis est la suivante:

L'involution I''_{24} engendrée par G''_{24} entre les points de F renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

Un groupe formé par les 4 éléments 6-ples:

$$(14')\ (1'4)\ (23')\ (2'3) \equiv (a_1 a'_1)\ (a_2 a'_2)\ (a_3 a'_3)\ (a_4 a'_4).$$

Deux groupes formés par 6 éléments 4-ples

$$(11')\ (33')\ (12')\ (1'2)\ (13')\ (2'4) - (22')\ (44')\ (1'3)\ (24')\ (34')\ (3'4).$$

Quatre groupes formés par 8 éléments 3-ples:

$$(a_1 b'_1)\ (a_2 b'_2)\ (a_3 b'_3)\ (a_4 b'_4)\ (a_1 c'_1)\ (a_2 c'_2)\ (a_3 c'_3)\ (a_4 c'_4),$$
$$(a'_1 b_1)\ (a'_2 b_2)\ (a'_3 b_3)\ (a'_4 b_4)\ (a'_1 c_1)\ (a'_2 c_2)\ (a'_3 c_3)\ (a'_4 c_4),$$
$$(b_1 b'_1)\ (b_2 b'_2)\ (b_3 b'_3)\ (b_4 b'_4)\ (c_1 c'_1)\ (c_2 c'_2)\ (c_3 c'_3)\ (c_4 c'_4),$$
$$(b_1 c'_1)\ (b_2 c'_2)\ (b_3 c'_3)\ (b_4 c'_4)\ (b'_1 c_1)\ (b'_2 c_2)\ (b'_3 c_3)\ (b'_4 c_4).$$

L'involution J''_{24} engendrée par G''_{24} entre les courbes C du système Σ, renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

Un groupe formé par les 4 éléments 6-ples:

$$14',\ 1'4,\ 23',\ 2'3 = a_1 a'_1,\ a_2 a'_2,\ a_3 a'_3,\ a_4 a'_4.$$

Deux groupes formés par 6 éléments 4-ples:

$$11',\ 22',\ 12',\ 3'4,\ 13',\ 1'3 - 33',\ 44',\ 1'2,\ 34',\ 24',\ 2'4.$$

Quatre groupes formés par 8 éléments triples. Ces groupes ont les mêmes symboles des 4 groupes correspondants de I''_{24}.

Dans la suite nous désignerons respectivement par IX, X, XI les classes de surfaces hyperelliptiques correspondantes aux groupes G_{24}, G'_{24}, G''_{24}.

104. — *Modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques* IX, X, XI. — Toute surface hyperelliptique Φ, image de l'involution I_{24}, peut aussi représenter une involution I_3 appartenant à une surface ψ, d'ordre 16, du type V. En effet les points d'un groupe de I_{24} se partagent en trois groupes engendrés par les transformations du sous-groupe bidiédrique G_8 renfermé en G_{24}. On passe d'un des trois groupes aux deux restant au moyen des transformations S_1, S_1^2, de sorte que tout groupe de I_{24} vient être représenté par un groupe de trois points de ψ, formant un cycle de l'homographie ω, périodique d'ordre 3, image de S_1.

On voit très aisément quelles sont les permutations produites entre les points doubles et les courbes rationnelles de ψ par l'homographie ω, car il suffit de chercher les permutations produites par S_1 entre les groupes singuliers des involutions I_8 et J_8 engendrées sur F et sur le système Σ, par le sous-groupe G_8.

On remarquera que la transformation S_1 laisse invariant quatre groupes de I_8 renfermant 8 points distincts: c'est-à-dire les groupes qui appartiennent aussi à I_{24}, lorsque on compte trois fois chacun de leurs points; de sorte que la ω

laissera aussi invariant quatre points simples de ψ. On arrive ainsi au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique Φ répondant au groupe bi-tétraédrique G_{24} peut représenter une involution I_3 appartenant à une surface ψ_{16} du type V: cette involution étant engendrée par une homographie ω périodique d'ordre 3, qui change en elle-même ψ. L'homographie ω change en lui-même un point uniplanaire de ψ et distribue les trois uniplanaires restant, ainsi que les trois points coniques de ψ, en deux cycles; elle laisse invariant la courbe d'huitième ordre et distribue en deux cycles les six quartiques tracées sur ψ. Hors des points doubles il y a encore sur ψ quatre points unis de ω.

Au point de vue des transformations birationnelles on a sur ψ six coïncidences, car dans le domaine du point uniplanaire invariant P, il existe deux points unis simples, qui sont les coïncidences de la correspondance projective (dont un cycle est formé par les trois points doubles infiniment voisins à P) existant dans le domaine de P.

En connaissant le nombre des coïncidences de I_3 on pourrait calculer le genre p_a de la surface image de I_3, et l'on trouverait $p_a = 1$.

Cette conclusion s'accorde avec la propriété, dont jouit un modèle convenable de la surface Φ, de ne posséder que des points doubles abaissant d'une unité le genre des sections hyperplanes qui les renferment. On peut établir ce résultat directement de la façon suivante.

Soit, comme d'habitude,

$$|D| = |C + C'' + \cdots + C^{(23)}|$$

le système linéaire de F qui renferme toute courbe C et ses transformées par rapport aux transformations de G_{24}. Désignons encore par Φ ou par Φ_{48} la surface d'ordre 48, dont les sections hyperplanes répondent aux courbes D. L'espace renfermant Φ aura la dimension $r = 25$; cette valeur étant la seule possible lorsque le genre p_a de Φ est égal à 1. En vertu de la correspondance [1, 3] entre les surfaces Φ et ψ, aux sections hyperplanes Γ de Φ répondent sur ψ les courbes d'un système linéaire $|\varDelta|$ renfermant les courbes réductibles formées de toute section hyperplane de ψ et de ses transformées par rapport à ω, ω^2.

Les points singuliers de Φ répondent:

1) Au point uniplanaire invariant P.

2) Au cycle formé par les trois points uniplanaires restant.

3) Au cycle formé par les trois points coniques.

4) A chacun des 4 points unis simples de la surface ψ.

On voit aisément qu'au cycle 2) répond un point uniplanaire *ordinaire* de Φ, car le domaine de ce point vient correspondre *biunivoquement* au domaine d'un quelconque des trois points uniplanaires ordinaires qui lui sont homologues. Et d'une façon analogue on conclut qu'au cycle 3) répond un point double conique de Φ.

Comme la ω établit entre les points appartenant au domaine d'un point uni simple Q, une homographie cyclique d'ordre trois ayant deux points unis, au point Q répondra sur Φ un point biplanaire ordinaire: les deux domaines de ce point répondant aux deux points unis susdits, et le domaine du point simple infiniment voisin suivant la direction de la droite commune aux deux plans tangents, répondant aux cycles de ω infiniment voisins à Q.

Il s'agit enfin d'étudier le point P' de Φ qui répond au point uniplanaire P de ψ.

On voit par des considérations désormais habituelles qu'aux sections hyperplanes issues par P' répondent sur ψ des courbes $\varDelta$ ayant en P un point triple dont les trois branches renferment les trois points doubles de ψ infiniment voisins à P. On en tire tout de suite que les sections hyperplanes susdites ont en P' un point de rebroussement (ordinaire) de sorte que le point P' est un point uniplanaire (non tacnodale). On peut ainsi poursuivre l'analyse du point singulier P'; mais ce qu'on a établi suffit pour affirmer que »la surface n'a que des points doubles abaissant d'une seule unité le genre des sections hyperplanes issues arbitrairement par un de ces points».

Par la même marche plusieurs fois indiquée, on arrive à compléter l'étude de la configuration des points doubles et des courbes rationnelles existant sur Φ; de sorte que l'on peut énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang 24 correspondant à un groupe G_{24} (type IX) peut être transformée birationnellement en une surface Φ_{48}, d'ordre 48, appartenant à l'espace S_{23}. Cette surface renferme 7 points doubles et 7 courbes rationnelles remarquables; c'est-à-dire:

Un point uniplanaire singulier, un point uniplanaire ordinaire, quatre points biplanaires ordinaires et un point conique; une courbe d'huitième ordre, deux courbes de 12^{me} ordre, quatre de 16^{me} ordre.

La surface Φ_{48} renferme de plus trois points doubles infiniment voisins à chacun des deux points uniplanaires: ces points doubles appartenant au domaine de 1^r ordre ou aux domaines successifs de 1^r, 2^d, 3^{me} ordre, suivant qu'il s'agit du point uniplanaire ordinaire ou du point singulier.

Par rapport aux propriétés de la configuration existant sur Φ_{48}, on a deux points biplanaires de rang 1 et deux de rang 2; une courbe de 12^{me} ordre et

rang 1, une courbe de 12^{me} ordre et rang 2, deux courbes de 16^{me} ordre et rang 1 et deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2.

Par le point uniplanaire singulier passent la courbe de 12^{me} ordre et rang 1, et les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2. Chacune de ces courbes passe par le point en question avec un rebroussement.

Par le point uniplanaire ordinaire passent les deux courbes de 12^{me} ordre: la courbe de rang 1 y passe simplement et la courbe de rang 2 doublement.

Par un point biplanaire de rang 1 passent simplement la courbe d'huitième ordre, une courbe de 16^{me} ordre et rang 1, et les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2.

Par un point biplanaire de rang 2 passent simplement les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 1, doublement une courbe de 16^{me} ordre et rang 2.

Par le point conique passent doublement la courbe d'8^{me} ordre et les deux courbes de 12^{me} ordre.

La courbe d'ordre 8 renferme le point conique (point nodal) et les deux points biplanaires de rang 1 (points simples).

La courbe d'ordre 12 et rang 1 renferme le point uniplanaire singulier (point de rebroussement), le point conique (point nodal), le point uniplanaire ordinaire (point simple).

La courbe d'ordre 12 et rang 2 renferme le point conique (nodal) et le point uniplanaire ordinaire (simple).

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point uniplanaire singulier (rebroussement), un point biplanaire de rang 1 et deux points biplanaires de rang 2 (simples).

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme un point biplanaire de rang 2 (nodal) et les deux points biplanaires de rang 1 (simples).

105. — Pour les surfaces répondant aux groupes G'_{24}, G''_{24} on a des résultats analogues, que nous nous bornerons à énoncer:

Toute surface hyperelliptique répondant à G'_{24} est birationnellement identique à une involution I_3 engendrée par une homographie ω' de troisième ordre, qui change en elle-même une surface ψ', d'ordre 16, du type VI. La ω' change en lui même le point conique de ψ' et distribue en deux cycles les six points biplanaires; change en elle-même une des quatres coniques de ψ' et distribue en deux cycles les 3 coniques restant et les trois courbes d'ordre 8. Hors du point conique invariant il y a encore sur ψ' quatre points unis simples.

On a ainsi sur ψ' six coïncidences de I_3, dont deux tombent dans le domaine du point conique invariant.

Partant:

Toute surface hyperelliptique de rang 24 *correspondant à* G'_{24} (type X) *peut être ramenée à une surface* Φ'_{48} *d'ordre* 48, *appartenant à* S_{25} *et renfermant* 7 *points doubles biplanaires et* 7 *courbes rationnelles.*

Parmi les points doubles il y en a un qui possède un point double infiniment voisin dans chacun des domaines de 1[r] et de 2[d] ordre, deux possèdent un point double dans leurs domaines de 1[r] ordre et les 4 restant sont des points biplanaires ordinaires. Parmi les courbes rationnelles une est d'ordre 2, une d'ordre 6, quatre d'ordre 16 et une d'ordre 24.

Par rapport aux propriétés de la configuration, on a un point biplanaire de rang 1 (c'est le premier point biplanaire singulier dont on a parlé ci-dessus), un point biplanaire singulier de rang 2 et un point de rang 3; deux points biplanaires ordinaires de rang 1 et deux de rang 2. Les courbes d'ordre 12 se distribuent en deux classes: deux de rang 1 et deux de rang 2.

Par le point singulier de rang 1 passent simplement les deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement (avec un *oscnode*) la courbe d'ordre 24.

Par le point singulier de rang 2 passent simplement la conique et la courbe d'ordre 6 et doublement (avec un *tacnode*) la courbe d'ordre 24.

Par le point singulier de rang 3 passent doublement la courbe d'ordre 6 (avec un *node*) et la courbe d'ordre 24 (avec un *tacnode*).

Par un point ordinaire de rang 1 passent simplement la conique, une courbe d'ordre 16 et rang 1 et les deux courbes d'ordre 16 et rang 2.

Par le point ordinaire de rang 2 passent simplement les deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement (avec un node) une courbe d'ordre 16 et rang 2.

La conique renferme le point singulier de rang 2 et les 2 points ordinaires de rang 1.

La courbe d'ordre 6 renferme les trois points singuliers de rang 2 et 3.

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point singulier de rang 1, un point ordinaire de rang 1 et les 2 points ordinaires de rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme les 2 points ordinaires de rang 1 et un point ordinaire de rang 2.

La courbe d'ordre 24 renferme les 3 points singuliers.

106. — *Toute surface hyperelliptique répondant à* G''_{24} *correspond aussi à une involution* I_3 *appartenant à une surface* ψ''_8 *du type VII; cette involution étant engendrée par une homographie cyclique* ω'' *d'ordre* 3. — *La* ω''

distribue en deux cycles les 6 *points biplanaires de* ψ'';

distribue en deux cycles les 6 *quartiques de* Φ'';

ramène en lui-même le point conique de la surface.

ramène en elle-même la courbe d'ordre 8 de la surface.

Il y a sur ψ'', hors du point conique invariant, quatre points unis simples.

Il s'ensuit encore que I_3 possède six coïncidences, dont deux tombent dans le domaine du point conique, et par suite que le genre p_a de toute surface répondant à G''_{24} est égal à 1.

Après cela on a que:

Toute surface hyperelliptique répondant à G''_{24} (type XI) peut être transformée en une surface Φ''_{48}, d'ordre 48, appartenant à l'espace S_{25} et renfermant 7 points doubles biplanaires et 7 courbes rationnelles remarquables. On a précisément:

Un point biplanaire singulier possédant deux points doubles successifs, deux points biplanaires singuliers, dont chacun possède un point double successif, et quatre points biplanaires ordinaires.

Parmi les 7 courbes une est d'ordre 8, deux d'ordre 12, quatre d'ordre 16.

Par rapport aux propriétés de la configuration, le premier point biplanaire singulier, dont on parle ci-dessus, est de rang 1, et les deux points singuliers restant sont de rang 2. On a ensuite deux points biplanaires ordinaires de rang 1 et deux de rang 2, deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et deux de rang 2.

Par le point singulier de rang 1 passent simplement les 2 courbes d'ordre 12 et les 2 courbes d'ordre 16 et rang 1.

La courbe d'ordre 8 renferme les points singuliers de rang 2 et les points ordinaires de rang 1.

Par un point singulier de rang 2 passent simplement une courbe d'ordre 8 et une d'ordre 12 et doublement la courbe restant d'ordre 12.

Une courbe d'ordre 12 renferme les 3 points singuliers.

Par un point ordinaire de rang 1 passent simplement la courbe d'ordre 8, une courbe d'ordre 16 et rang 1 et les 2 courbes d'ordre 16 et rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point singulier de rang 1, un point ordinaire de rang 1 et les 2 points ordinaires de rang 2.

Par un point ordinaire de rang 2 passent simplement les 2 courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement une courbe d'ordre 16 et rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme les 2 points ordinaires de rang 1 et un point ordinaire de rang 2.

107. — *Les surfaces hyperelliptiques Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48} caractérisées par la configuration de leurs points et de leurs hyperplans singuliers.* — Nous venons de con-

struire trois surfaces-modèles représentant les types IX, X, XI; ce sont les surfaces Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}.

Chacune de celles-ci possède une configuration de points doubles et de hyperplans tangents suivant des courbes rationnelles; plus précisement toute courbe rationnelle C d'ordre m ($=2$, 6, 8, 12, 16, 24) appartient à un hyperplan qui a un contact d'ordre $\frac{48}{m} - 1$ le long de C.

Or il y a lieu de reconnaître que »si une surface d'ordre 48, à sections hyperplanes de genre 25 en S_{25}, possède des points et des hyperplans singuliers formant une configuration qui jouit des propriétés correspondantes à celles de Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}, cette surface est hyperelliptique et appartient respectivement aux types IX, X, XI»

C'est ce que l'on exprime en disant que:

La configuration des points et des hyperplans singuliers joue un rôle caractéristique par rapport aux surfaces hyperelliptiques Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}.

Rapportons nous d'abord à une surface Φ_{48}. Il s'agit de montrer que la configuration des points et des hyperplans singuliers permet de représenter paramétriquement les coordonnées des points de la surface par des fonctions hyperelliptiques Θ. Et cette question se ramène à la question analogue concernant une surface du type V, que l'on construit par le procédé suivant.

Soient

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

les deux hyperplans tangents suivant des courbes C_{16} d'ordre 16 et de rang 1. Posons

$$y_1 = x_1, \ldots y_{26} = x_{26}, \; y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2}.$$

Par ces formules on définit une surface qui possède 3 points coniques correspondants au point conique de Φ_{48}, 3 points uniplanaires correspondants au point uniplanaire ordinaire de Φ_{48}, et un quatrième point uniplanaire (ordinaire) correspondant au point uniplanaire singulier de Φ_{48}; tout point biplanaire de rang 1, 2 de Φ_{48} résulte un point de diramation sur chaque nappe de Φ_{48} qui le contient, et correspond à un point simple de la surface qui est représentée sur la Φ_{48} comptée trois fois. Une analyse approfondie montre que cette surface est birationnellement identique à la Φ_{16} du type V.

On procédéra par la même méthode par rapport à une surface Φ'_{48}.

Analoguement à ce que nous avons fait pour le type IX, nous choisirons les deux hyperplans tangents suivant les courbes C_{16} de rang 1. Ces hyperplans étant représentés par

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0,$$

nous poserons

$$y_1 = x_1, \ldots, y_{26} = x_{26}, \ y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2}.$$

Nous obtiendrons ainsi une surface renfermant 6 points biplanaires singuliers correspondants à ceux de rang 2, 3 de Φ'_{48} et un point conique correspondant au point singulier de rang 1 (qui est un point de diramation sur chaque nappe de Φ'_{48}). Cette surface résulte birationnellement identique à la Φ'_{16} (type VI).

Soit enfin une surface possédant la même configuration que la Φ''_{18} du type XI.

Choisissons de même les hyperplans

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0.$$

tangents suivant des courbes C_{16} de rang 1.

En posant

$$y_1 = x_1, \ldots, y_{26} = x_{26}, \ y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2},$$

on obtient une surface birationnellement identique à la Φ''_{16} (type VII).

XIV. Quelques remarques concernant les surfaces hyperelliptiques régulières II, ... XI.

108. — *Transformation des surfaces-modèles* II, ... XI *en des surfaces du quatrième ordre.* Nous avons choisi comme modèles des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, II, ... XI des surfaces d'ordre $2r$, Φ_{2r}, appartenant à des hyperespaces.

Or toute Φ_{2r} peut être projetée successivement par ses points doubles, ou par quelques unes de ses courbes rationnelles remarquables. Par ce procédé on peut toujours transformer une surface hyperelliptique Φ_{2r} en une surface d'ordre 4 de l'espace ordinaire.

Pour ce qui concerne les surface II, ... VIII, il suffit de les projeter successivement par des points doubles. Dans le cas IX considérons p. ex. l'espace S_{15} qui renferme une courbe C_{16} de rang 2, et projetons de S_{16} la Φ_{48} en une surface Φ_{11} de S_8; Φ_{11} possède 4 points doubles infiniment voisins, un point uniplanaire ordinaire (auquel sont voisins trois points doubles), un point biplanaire et

un point conique, de sorte que elle pourra être projetée en une surface d'ordre 4 de S_3 en prenant successivement comme centres de projection 5 points doubles.

D'une façon analogue on réussit à projeter en une surface d'ordre 4 les autres surfaces Φ'_{48}, Φ''_{48}.

109. — *Représentation sur un plan double.* — Les surfaces du quatrième ordre auxquelles on est amené de plusieurs façons différentes par des projections successives de nos Φ_{2r}, possèdent des points doubles; en prenant un de ces points comme centre de projection on ramenera la surface à un plan double ayant une courbe de diramation d'ordre 6.

Par les remarques qui precède se trouve établi le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang $r > 1$ admettant une représentation paramétrique propre par des Θ irréductibles relatives à un tableau de périodes primitives

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g', \end{matrix}$$

peut être transformée en une surface du quatrième ordre, ou, si l'on aime mieux, en une surface du sixième ordre

$$z^2 = f(x, y).$$

La surface du quatrième ordre aura en général des points doubles et des surfaces tangentes suivant des courbes rationnelles; ces points et ces courbes formerons une configuration caractéristique qui dépend non seulement du type auquel appartient la surface hyperelliptique donnée, mais aussi des liens en partie arbitraires qui rattachent cette configuration à celle de la surface typique correspondante, Φ_{2r}.

De même les courbes $f = 0$, d'ordre 6, correspondantes à des surfaces hyperelliptique $z^2 = f(x\ y)$ auront des points doubles et des courbes pluritangentes jouant un rôle caractéristique.

110. — *Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre de rang* 3 (type II). Considérons la surface hyperelliptique Φ_6 (type II).

En la projetant par le point double (11') on aura une surface du quatrième ordre qui renfermera quatre droites 1'2, 12', 13', 1'3, contenant chacune trois points doubles biplanaires, et formant un quadrilatère gauche, dont les sommets sont les points doubles (22') (2'3) (33') (3'2).

Ainsi donc on obtient *une surface du quatrième ordre possédant 8 points biplanaires qui sont situés trois par trois sur 4 droites.* Il y a en outre 5 coniques appartenant à la surface et renfermant chacune 4 points biplanaires etc.

Il est aisé d'écrire l'équation de cette surface du quatrième ordre.

En supposant que Φ soit représentée par les équations (5) du n. 79, et que le centre de projection tombé en le point $(1, 0, 0, -1, 0, 0)$, posons

$$y_1 = x_1 + \varepsilon, \; y_2 = x_2, \; y_3 = x_3,$$
$$y_4 = x_4 - \varepsilon, \; y_5 = x_5, \; y_6 = x_6.$$

Supposons que la projection soit faite sur l'hyperplan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0;$$

il faudra poser

$$\varepsilon = -(x_1 + x_2 + x_3).$$

On aura

$$y_1 y_2 y_3 + \lambda y_4 y_5 y_6 - \varepsilon (y_2 y_3 - \lambda y_5 y_6) = 0$$
$$y_1 y_2 + \cdots + \sqrt{\lambda}\, y_4 y_5 + \cdots - \varepsilon (y_4 \sqrt{\lambda} - y_1) = 0.$$

Eliminons ε, remplaçons y_3, y_6 par $-y_1 - y_2$, $-y_4 - y_5$, et enfin posons

$$x = y_1, \; y = y_2, \; z = y_4, \; 1 = y_5;$$

on aura *l'équation de la surface du quatrième ordre sous la forme suivante:*

$$[y(x+y) - \lambda(z+1)]\; [xy - (x+y^2) + \sqrt{\lambda} z - \sqrt{\lambda}(z+1)^2] - [xy(x+y) + \lambda z(z+1)] = 0.$$

111. — *Quelques exemples de surfaces hyperelliptiques $z^2 = f(xy)$.* Reprenons la surface hyperelliptique du quatrième ordre du type II considérée ci-dessus et projetons-là sur un plan double en prenant comme centre de projection le point $(22')$.

Sur le plan double on trouvera une courbe de diramation d'ordre 6 possédant 7 points doubles $(13')$ $(2'3)$ $(1'3)$ $(23')$ $(33')$ $(12')$ $(1'2)$, parmi lesquels il y a deux couples de points infiniment voisins $(13')$ $(2'3)$, $(1'3)$ $(23')$; il y aura deux droites renfermant chacune trois points doubles et se coupant en le point double $(33')$ etc.

Nous ne développerons pas l'étude de ce plan double qui en somme n'est pas très élégant à cause du défaut de symétrie de sa configuration caractéristique. Il suffira de remarquer que la projection du modèle que nous avons construit en un hyperespace, conduit en ce cas, aussi bien que dans les cas successifs, à déterminer les plans doubles correspondants au type hyperelliptique donné.

Parmi les autres types de surfaces hyperelliptiques, il y en a un qui amène à un plan double extrémement simple et très élégant. Nous nous arrêterons sur cet exemple.

Considérons la surface Φ_{16} de S_9 (type V). Elle possède 4 points doubles uniplanaires ordinaires (dont chacun a 3 points doubles infiniment voisins) et 3 points coniques; en projetant de ceux 7 points doubles la surface vient représentée sur un plan double. La courbe de diramation de celui-ci sera une courbe C_6, d'ordre 6, possédante 12 points doubles qui se réunissent en 6 couples de points infiniment voisins, c'est-à-dire en 6 tacnodes correspondants aux quartiques de Φ. Les 6 tacnodes se trouveront trois à trois sur une droite représentant le domaine d'un point uniplanaire de Φ.

En conclusion la surface Φ vient représentée sur un plan double dont la courbe de diramation C_6 passe doublement par les 6 sommets d'un quadrilatère complet, et a en ces points des tacnodes.

Il est aisé de caractériser une telle C_6.

D'abord son genre (numérique) étant -2, la courbe se décompose en trois parties, et on peut reconnaître que ces parties sont des coniques.

Or il s'agit de construire trois coniques se touchant deux à deux deux fois, de façon que les points de contact tombent en les sommets d'un quadrilatère complet. Ces conditions suffisent à déterminer un triplet de coniques, bien défini au point de vue projectif.

Par une transformation homographique du plan on peut ramener le quadrilatère à un carré; alors, parmi les trois coniques, deux deviendront des hyperboles équilatères éguales ayant les mêmes asymptotes, et la troisième devient un cercle passant par les quatre sommets du carré, qui sont aussi les sommets de nos hyperboles.

Ainsi donc la courbe C_6 se réduit à

$$(x^2+y^2-1)\,(x^2-y^2-1)\,(y^2-x^2-1)=0;$$

le cercle imaginaire

$$x^2+y^2+1=0,$$

qui touche en deux points chaque conique faisant partie de C_6, représente sur le plan double la courbe d'ordre 8 de Φ (courbe qui passe doublement par les 3 points coniques de cette surface).

En conclusion on a le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique du type V (premier cas bi-diédrique) peut être transformée birationnellement en la surface

$$z^2=(x^2+y^2-1)\,(x^2-y^2-1)\,(y^2-x^2-1).$$

Sommaire.

Première partie (tome 32).

DEUX ERREURS DANS LA TABLE DES RACINES PRIMITIVES DE WERTHEIM.

Lettre à l'éditeur.

PAR

C. POSSE

à ST. PETERSBOURG.

Monsieur,

Parmi les manuscrits du feu M. KORKINE se trouve une table, contenant une racine primitive pour chacun des nombres premiers inférieurs à 4 000.

En la comparant à celles de M. WERTHEIM, insérées dans les t. 17 et 20 des Acta mathematica, j'ai trouvé dans ces dernières, outre les erreurs, corrigées par M. WERTHEIM lui-même dans les t. 20 et 22 de Vôtre Journal, encore deux, que je me permets de Vous signaler.

1) La plus petite racine primitive du nombre $p = 2161$ est 23; le nombre 14, indiqué dans la table de M. WERTHEIM (t. 17) n'est pas racine primitive, appartenant, suivant le module p, à l'exposant $720 = \frac{p-1}{3}$.

2) Le nombre $p = 3851$ n'a pas 10 pour racine primitive, comme il est indiqué dans la table de M. WERTHEIM (t. 20); le nombre 10 appartient, suivant le module p, à l'exposant $770 = \frac{p-1}{5}$.

La table de M. KORKINE diffère de celles de M. WERTHEIM en ce qu'elle contient outre les racines primitives encore d'autres nombres, appelés *caractères*, et servant à la résolution de toutes les congruences binômes, sans le secours des tables d'indices, qui ne sont calculées, autant que je sais, que pour les nombres premiers inférieurs à 1 000 (Canon arithmeticus de JACOBI).

La méthode de la résolution des congruences binômes, fondée sur l'emploi des caractères, est exposée dans un mémoire posthume de Korkine, qui va paraître prochainement dans le «Recuiel mathématique» de Moscou (en russe) avec la table, calculée par l'auteur.

Je profite de l'occasion pour rappeler de l'existence d'une table plus vaste et plus ancienne que les tables de M. Wertheim, due à E. Desmarest, présentée à l'Institut de France en 1845 (voir Comptes rendus T. XXI (1845) et T. XXII (1846)), et publiée ensuite en 1852 dans une monographie de l'auteur sous le titre »Traité d'analyse indéterminée» (Paris, Hachette).

La table de M. Desmarest contient une racine primitive pour chacun des nombres premiers inférieurs à 10,000, ce qui est le double de la limite des tables de M. Wertheim; en dehors de la limite 5,000, les tables de M. Wertheim ne contiennent les racines primitives que pour les nombres premiers de la forme $2^n q + 1$, q étant premier impair.

Je dois la connaissance du travail de Desmarest à M. A. Markoff, qui l'a trouvé grâce à une indication, faite par M. Escott dans »l'Intermédiaire des mathématiciens» pour 1905, pag. 17—19.

Acta mathematica. 33.

Page	256,	ligne	14,	au	lieu	de	17	lire	249.
»	264,	»	12,	»	»	»	19	»	251.
»	286,	»	5,	»	»	»	12	»	244.
»	290,	»	11,	»	»	»	51	»	283.